ME414 - Estatística para Experimentalistas

Teste de Permutação para Duas Médias

Introdução

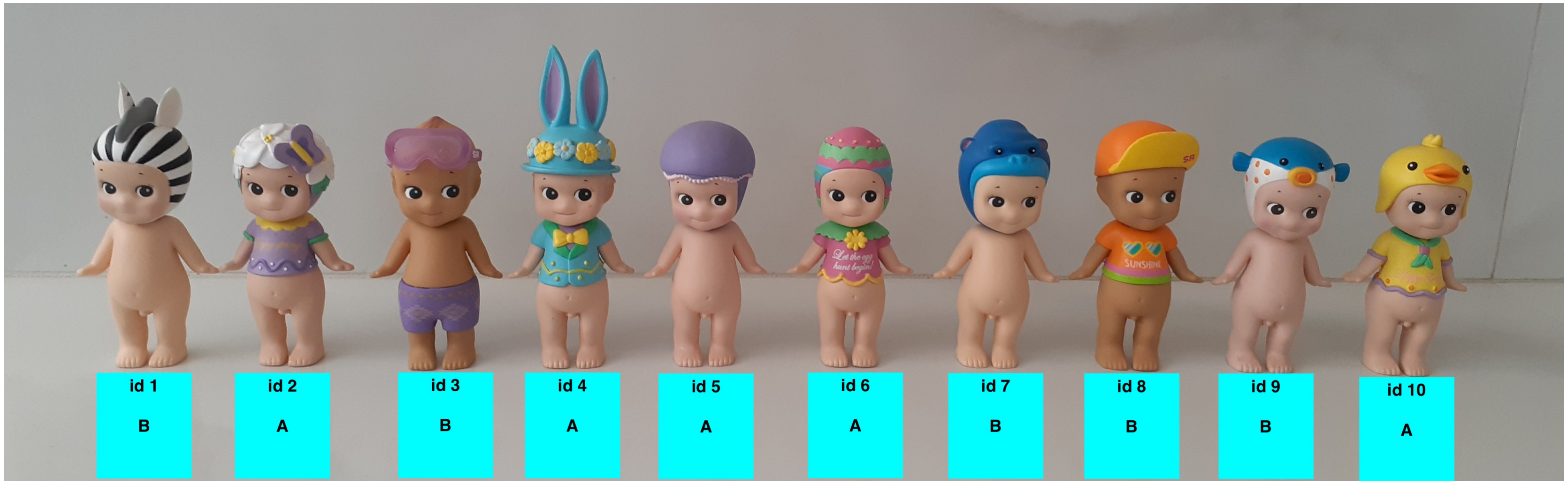
Testes de permutação/aleatorização podem ser utilizados para avaliar hipóteses sobre efeitos de tratamentos, quando as unidades experimentais são alocadas aleatoriamente para cada tratamento.

Exemplo: Um grupo de pesquisadores quer avaliar se dois tratamentos, A e B apresentam diferença com relação a uma certa resposta de interesse.

Os pesquisadores têm à disposição 10 pessoas.

Exemplo

As 10 pessoas são alocadas, aleatoriamente, a um dos tratamentos:



Exemplo

Após aplicar o tratamento, coletamos a variável resposta de interesse em cada pessoa.

Exemplo - Dados observados

ID	Tratamento	Resposta
1	B	33
2	A	10
3	B	24
4	A	16
5	A	13
6	A	18
7	B	19
8	B	29
9	B	29
10	A	16

Exemplo

- $\bar{x}_A = 14.6$
- $\bar{x}_B = 26.8$
- Diferença entre A e B é -12.2.
- Esta diferença indica que A tem média inferior à B (pensando populacionalmente, não apenas na nossa amostra)?
- Seria possível, mesmo que não houvesse diferença entre os tratamentos, observar uma diferença de -12.2? Isto é, a diferença observada foi devido ao acaso? Ou foi devido ao fato de realmente existir uma diferença entre os tratamentos?

Exemplo

- H_0: não há diferença entre os tratamentos
- μ_A a verdadeira média das respostas do Tratamento A
- μ_B a verdadeira média das respostas do Tratamento B
- $H_0: \mu_A = \mu_B$.
- Como avaliar?

Exemplo

Sob H_0, não existe diferença entre os tratamentos.

Se H_0 é verdadeira, então a resposta de cada pessoa não tem ligação com o tratamento que ela recebeu.

Exemplo

Se H_0 é verdadeira, a diferença observada de -12.2, foi apenas consequência de uma alocação aleatória em dois grupos A e B.

Iremos, desta forma, repetir o argumento da H_0: avaliar todas as alocações aleatórias possíveis de 10 pessoas entre os Tratamentos A e B e calcular a diferença entre as médias.

Exemplo

Quantas maneiras temos de escolher ao acaso 5 pessoas, de um grupo de 10?

$$\binom{10}{5} = 252$$

Temos 252 maneiras de alocar 5 pessoas para o tratamento A e as restantes para o tratamento B.

Alguns ex das 252 combinações possíveis

	id Trat A	id Trat A	id Trat A	id Trat A	id Trat A	Média do Trat A	Média do Trat B	Diferença entre A e B
8	1	2	3	5	7	19.8	21.6	-1.8

Alguns ex das 252 combinações possíveis

	id Trat A	id Trat A	id Trat A	id Trat A	id Trat A	Média do Trat A	Média do Trat B	Diferença entre A e B
2	1	2	3	4	6	20.2	21.2	-1

Alguns ex das 252 combinações possíveis

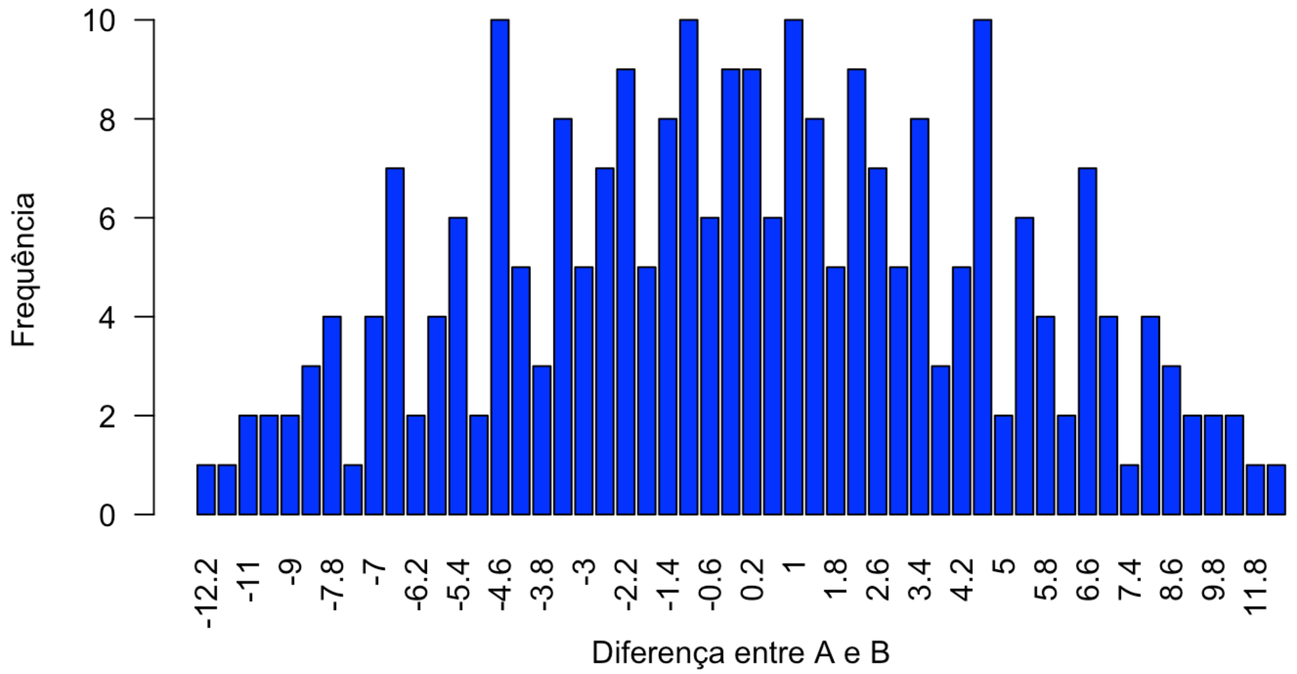
id Trat A	id Trat A	id Trat A	id Trat A	id Trat A	Média do Trat A	Média do Trat B	Diferença entre A e B
1	2	3	4	5	19.2	22.2	-3.0
1	2	3	4	6	20.2	21.2	-1.0
1	2	3	4	7	20.4	21.0	-0.6
1	2	3	4	8	22.4	19.0	3.4
1	2	3	4	9	22.4	19.0	3.4
1	2	3	4	10	19.8	21.6	-1.8
1	2	3	5	6	19.6	21.8	-2.2
1	2	3	5	7	19.8	21.6	-1.8
1	2	3	5	8	21.8	19.6	2.2
1	2	3	5	9	21.8	19.6	2.2

Alguns ex das 252 combinações possíveis

	id Trat A	id Trat A	id Trat A	id Trat A	id Trat A	Média do Trat A	Média do Trat B	Diferença entre A e B
11	1	2	3	5	10	19.2	22.2	-3.0
12	1	2	3	6	7	20.8	20.6	0.2
13	1	2	3	6	8	22.8	18.6	4.2
14	1	2	3	6	9	22.8	18.6	4.2
15	1	2	3	6	10	20.2	21.2	-1.0
16	1	2	3	7	8	23.0	18.4	4.6
17	1	2	3	7	9	23.0	18.4	4.6
18	1	2	3	7	10	20.4	21.0	-0.6
19	1	2	3	8	9	25.0	16.4	8.6
20	1	2	3	8	10	22.4	19.0	3.4

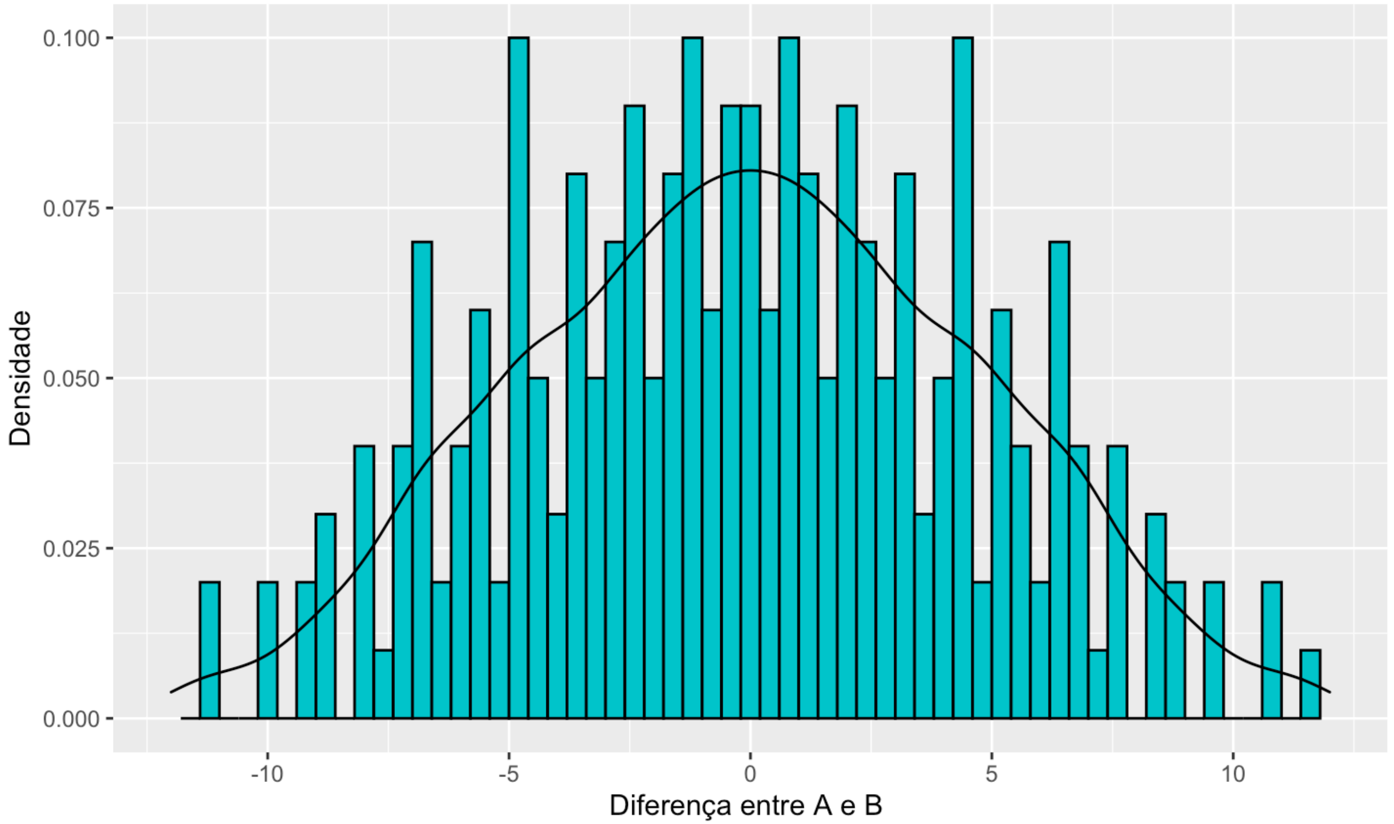
Exemplo

Todas as diferenças obtidas através de alocação ao acaso nos tratamentos:



Exemplo

Todas as diferenças obtidas através de alocação ao acaso nos tratamentos:



Exemplo

A diferença observada foi de -12.2.

Sob H_0, obteríamos uma diferença de $|-12.2|$ ou ainda maior, em valor absoluto, 2 vezes.

Como temos 252 combinações possíveis e apenas 2 com valores iguais ou mais extremos ao valor de diferença observada no experimento, temos que o p-valor é:

$$\frac{2}{252} = 0.0079365$$

Desta maneira, uma valor de diferença como o observado ou ainda mais extremo pode ocorrer ao acaso com probabilidade 0.0079365. Se considerarmos um nível de significância $\alpha = 0.05$, concluímos que os dados trazem evidências para rejeitar a hipótese de que não há diferença entre os tratamentos.

Exemplo

Se utilizarmos o teste *t-student* para duas amostras (variâncias iguais):

```
##
##  Two Sample t-test
##
## data:  Resposta by Tratamento
## t = -4.3683, df = 8, p-value = 0.002386
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -18.640319  -5.759681
## sample estimates:
## mean in group A mean in group B
##            14.6            26.8
```

Exemplo

Se utilizarmos o teste *t-student* para duas amostras (variâncias diferentes):

```
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  Resposta by Tratamento
## t = -4.3683, df = 6.4131, p-value = 0.004039
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -18.928547  -5.471453
## sample estimates:
## mean in group A mean in group B
##            14.6            26.8
```

Exemplo 2

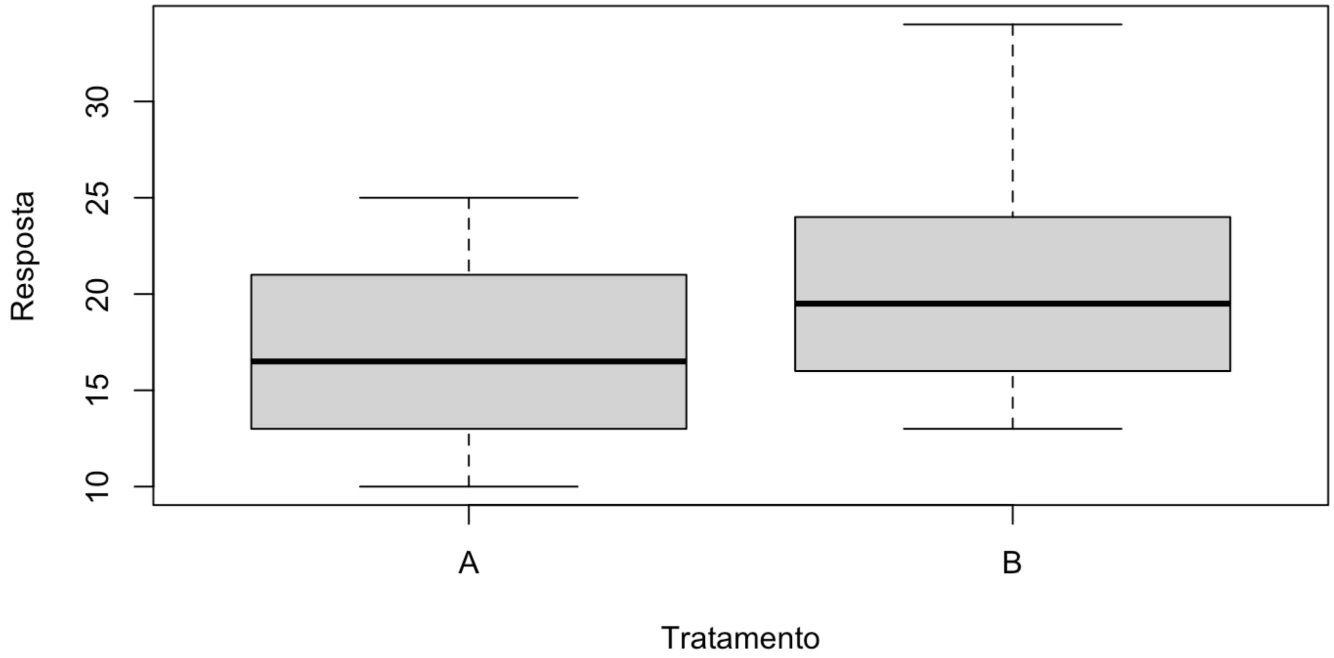
Um grupo de pesquisadores quer avaliar se dois tratamentos, A e B apresentam diferença com relação a uma certa resposta de interesse.

Os pesquisadores têm à disposição 20 pessoas.

As 20 pessoas são alocadas, aleatoriamente, a um dos tratamentos.

Após aplicar o tratamento, coletamos a variável resposta de interesse em cada pessoa.

Exemplo 2



Exemplo 2

Dados observados:

- $\bar{x}_A = 17.1$
- $\bar{x}_B = 21.5$
- Diferença entre A e B é -4.4.
- Esta diferença indica que A tem média inferior à B (pensando populacionalmente, não apenas na nossa amostra)?
- Seria possível, mesmo que não houvesse diferença entre os tratamentos, observar uma diferença de -4.4? Isto é, a diferença observada foi devido ao acaso? Ou foi devido ao fato de realmente existir uma diferença entre os tratamentos?

Exemplo 2

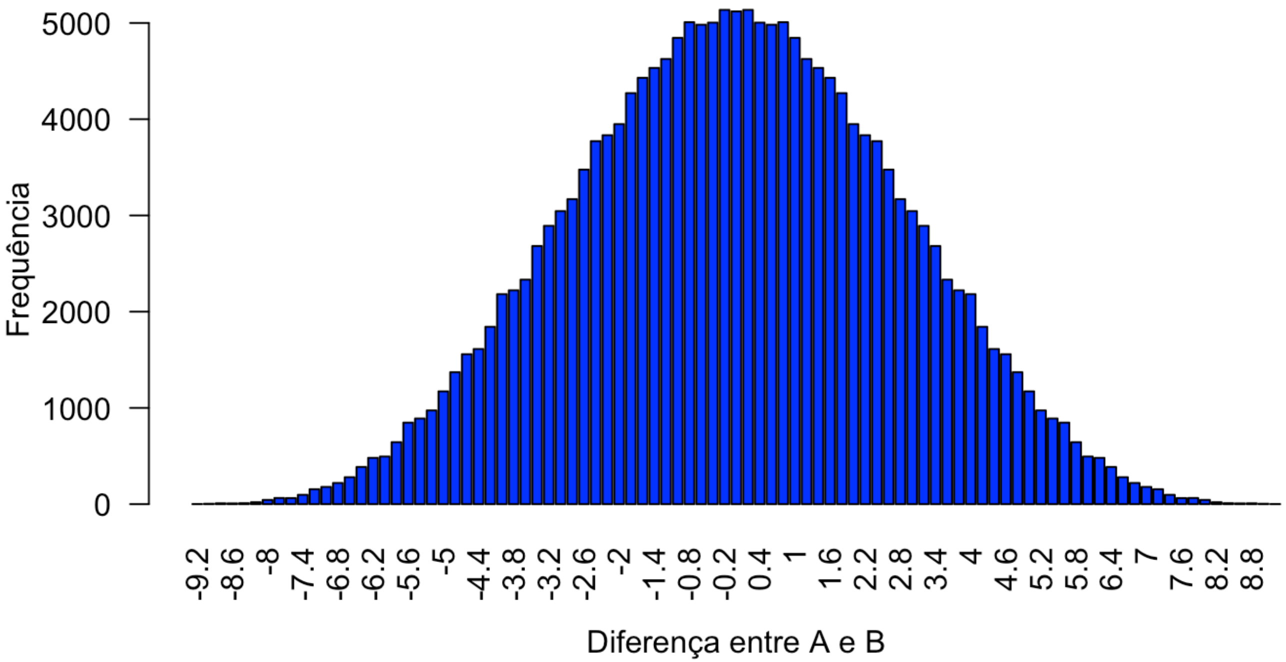
Quantas maneiras temos de escolher ao acaso 10 pessoas, de um grupo de 20?

$$\binom{20}{10} = 1.84756 \times 10^5$$

Temos 1.84756×10^5 maneiras de alocar 10 pessoas para o tratamento A e as restantes para o tratamento B.

Exemplo 2

Todas as diferenças obtidas através de alocação ao acaso nos tratamentos:



Exemplo 2

P-valor: diferenças iguais ou maiores, em valor absoluto, do que o valor absoluto da diferença observada, $|-4.4|$.

P-valor: 0.1253978

Exemplo 2

Se utilizarmos o teste *t-student* para duas amostras (variâncias iguais):

```
##
##  Two Sample t-test
##
## data:  Resposta by Tratamento
## t = -1.6586, df = 18, p-value = 0.1145
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -9.973496  1.173496
## sample estimates:
## mean in group A mean in group B
##            17.1            21.5
```

Exemplo 2

Se utilizarmos o teste *t-student* para duas amostras (variâncias diferentes):

```
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  Resposta by Tratamento
## t = -1.6586, df = 15.479, p-value = 0.1173
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -10.03927   1.23927
## sample estimates:
## mean in group A mean in group B
##            17.1            21.5
```

Passo-a-passo

- H_0: $\mu_A = \mu_B$
- Aloque as pessoas em um dos dois tratamentos, aleatoriamente: m alocados ao Tratamento A e n alocados ao Tratamento B
- Calcule a média para cada tratamento: $\bar{x}_A$ e $\bar{x}_B$
- Calcule a diferença entre as médias: $D_{obs} = \bar{x}_A - \bar{x}_B$
- Permute as $m + n$ observações entre os dois tratamentos, obtenha uma lista com todas as permutações possíveis:

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

Passo-a-passo

- Para cada permutação, calcule D, a diferença entre as médias dos tratamentos.
- Encontre o p-valor:
  - $H_a: \mu_A > \mu_B$

$$\text{p-valor} = \frac{\#\{D \geq D_{obs}\}}{\binom{m+n}{m}}$$

  - $H_a: \mu_A < \mu_B$

$$\text{p-valor} = \frac{\#\{D \leq D_{obs}\}}{\binom{m+n}{m}}$$

  - $H_a: \mu_A \neq \mu_B$

$$\text{p-valor} = \frac{\#\{|D| \geq |D_{obs}|\}}{\binom{m+n}{m}}$$