ME414 - Estatística para Experimentalistas

Uma senhora toma chá, mas eu tomo Coca-Cola!

Teste de Hipóteses - Introdução

Uma senhora toma chá

R. A. Fisher foi um dos fundadores da Estatística moderna.

Em um de seus famosos experimentos, ele testou a capacidade de uma senhora em distinguir se a xícara estava servida com o leite colocado antes ou depois do chá.

Vídeo

Uma senhora toma chá

Como planejar um experimento para testar a capacidade da pessoa distinguir se o chá foi preparado com leite primeiro ou por último?

- Como lidar com variações na temperatura do chá, quantidade de açúcar, entre outras?
- Quantas xícaras devem ser usadas no teste? Qual a ordem de apresentação dessas xícaras?
- Qual conclusão iremos tirar caso a pessoa erre somente uma vez? Ou duas vezes?

Experimento

- 12 xícaras: 6 com chá colocado antes do leite e 6 com leite antes do chá.
- As 12 xícaras foram apresentadas em ordem aleatória para a senhora, mas a informação de que eram 6 de cada tipo foi passada a ela.
- A senhora deveria provar a bebida das 12 xícaras e escolher as 6 xícaras que acreditava estar com chá primeiro.
- Verificou-se quantas dentre as 6 xícaras ela escolheu corretamente.
- Quais os resultados possíveis do experimento?

Resultados possíveis

- Tarefa da senhora: escolher as 6 xícaras com chá primeiro.
- São 12 xícaras: 6 com leite primeiro e 6 com chá primeiro.
- A senhora escolhe 6 dentre 12, sem reposição.
- De quantas formas ela pode fazer isso, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

$$\binom{12}{6} = 924$$

Resultados possíveis

- É possível que ela escolha as 6 corretamente: 6 com chá primeiro.
- De quantas formas ela pode escolher 6 corretas?
- Para escolher 6 corretas, duas coisas devem ocorrer: escolher 6 com chá primeiro (dentre 6 com chá primeiro) e não escolher nenhuma dentre as 6 com leite primeiro.
- De quantas formas é possível fazer isso, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

$$\binom{6}{6}\binom{6}{0} = 1$$

Resultados possíveis

- É possível que ela escolha 5 corretamente: 5 com chá primeiro e 1 com leite primeiro.
- De quantas formas ela pode escolher 5 corretas, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

$$\binom{6}{5}\binom{6}{1} = 36$$

Resultados possíveis

- É possível que ela escolha 4 corretamente: 4 com chá primeiro e 2 com leite primeiro.
- De quantas formas ela pode escolher 4 corretas, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

$$\binom{6}{4}\binom{6}{2} = 225$$

Resultados possíveis

- É possível que ela escolha 3 corretamente: 3 com chá primeiro e 3 com leite primeiro.
- De quantas formas ela pode escolher 3 corretas, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

$$\binom{6}{3}\binom{6}{3} = 400$$

Resultados possíveis

- É possível que ela escolha 2 corretamente: 2 com chá primeiro e 4 com leite primeiro.
- De quantas formas ela pode escolher 3 corretas, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

$$\binom{6}{2}\binom{6}{4} = 225$$

Resultados possíveis

- É possível que ela escolha 1 corretamente: 1 com chá primeiro e 5 com leite primeiro.

- De quantas formas ela pode escolher 1 correta, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

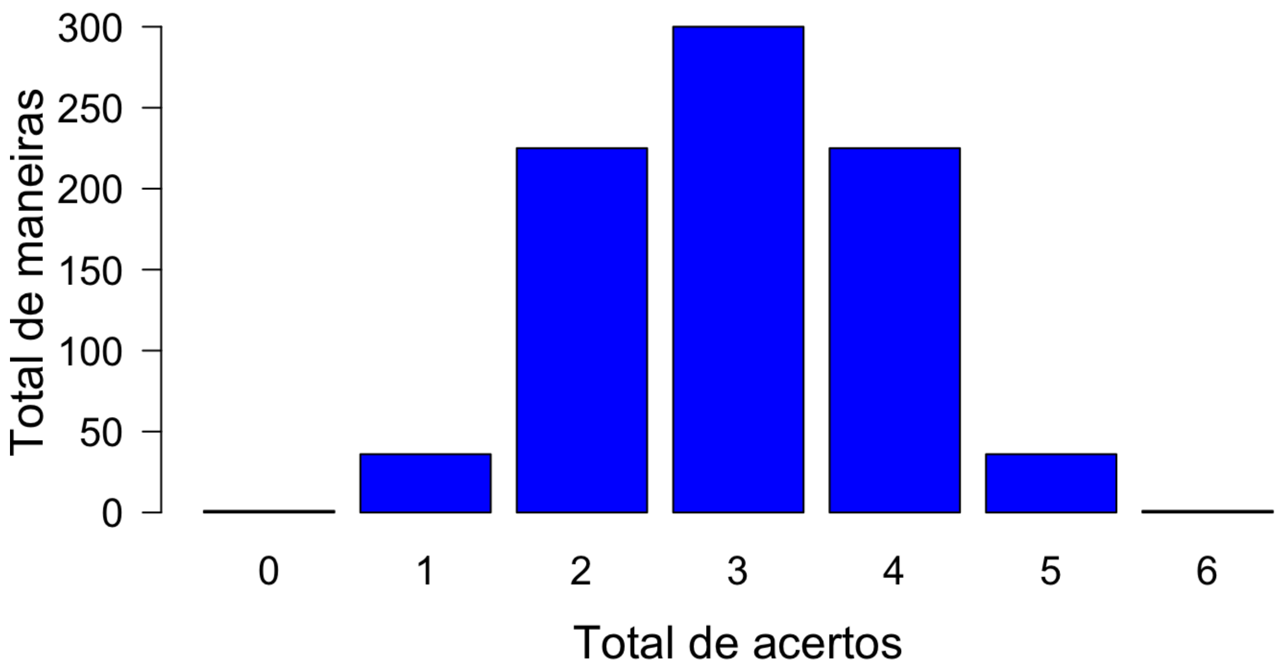
$$\binom{6}{1}\binom{6}{5} = 36$$

Resultados possíveis

- É possível que ela erre todas: 0 com chá primeiro e 6 com leite primeiro.
- De quantas formas ela pode errar todas, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

$$\binom{6}{0}\binom{6}{6} = 1$$

Resultados possíveis



Teste de hipótese

- H_0: A senhora não consegue distinguir entre chá ou leite primeiro e escolhe ao acaso durante o experimento.
- H_a: A senhora consegue distinguir.
- Estatística do teste: Total de acertos (X)
- Para decidir, precisamos primeiramente da distribuição de probabilidade da estatística do teste quando H_0 é verdadeira.

Distribuição Hipergeométrica

- População dividida em duas características
- Extrações casuais sem reposição
- N objetos
- r têm a característica A
- $N - r$ têm a característica B
- um grupo de n elementos é escolhido ao acaso, dentre os N possíveis, sem reposição.

Queremos calcular a probabilidade de que este grupo de n elementos contenha x elementos com a característica A.

Distribuição Hipergeométrica

Elemento escolhido	Característica A	Característica B	Total
sim	x	$n - x$	n
não			$N - n$
Total	r	$N - r$	N

Seja X a v.a. que representa o número de elementos com a característica A dentre os n escolhidos ao acaso.

Então dizemos que X segue uma distribuição **Hipergeométrica** com parâmetros N, n, r, ou seja, $X \sim Hip(N, n, r)$.

A probabilidade de se observar x é dada por:

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad 0 \leq x \leq min\{r, n\}$$

Teste de hipótese

- População dividida em duas características: chá primeiro, leite primeiro.
- Extrações casuais sem reposição
- N objetos: 12 xícaras
- r têm a característica A: 6 com chá primeiro
- $N - r$ têm a característica B: 6 com leite primeiro
- Um grupo de n elementos é **escolhido ao acaso**, dentre os N possíveis, sem reposição: a senhora escolhe 6 xícaras dentre as 12.

Teste de hipótese

Queremos calcular a probabilidade de que dentre as 6 xícaras escolhidas x tenham de fato o chá colocado primeiro.

Seja X a v.a. que representa o número de xícaras com chá primeiro dentre as 6 selecionadas.

Então dizemos que X segue uma distribuição **Hipergeométrica** com parâmetros N, n, r, ou seja, $X \sim Hip(N = 12, n = 6, r = 6)$.

A probabilidade de se observar x é dada por:

$$P(X = x) = \frac{\binom{6}{x}\binom{6}{n-x}}{\binom{12}{6}}, \qquad 0 \leq x \leq 6$$

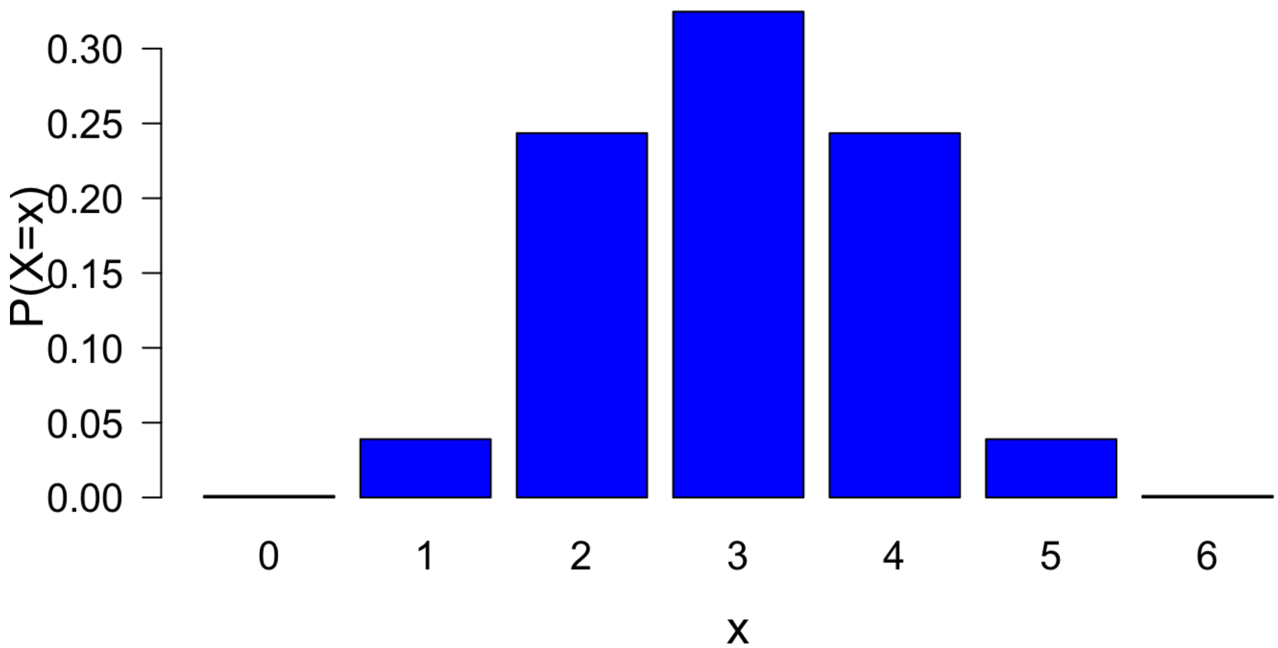
Teste de hipótese

- H_0: A senhora não consegue distinguir entre chá ou leite primeiro e escolhe ao acaso durante o experimento.
- Estatística do teste: Total de acertos (X)
- Distribuição de probabilidade da estatística do teste, quando H_0 é verdadeira.

$$P(X = x) = \frac{\binom{6}{x}\binom{6}{6-x}}{\binom{12}{6}}, \qquad 0 \leq x \leq 6$$

Teste de Hipótese

Distribuição da Estatística do Teste sob H_0



Teste de Hipótese

Como decidir se rejeitamos ou não H_0 de acordo com a estatística do teste observada?

Como decidir se rejeitamos a hipótese de que a senhora não consegue distinguir os chás, sendo que ela acertou, por exemplo, 4? Se ela tivesse acertado todas as 6 xícaras? Seria por pura sorte? Ou ela tem algum conhecimento?

Calculamos a probabilidade, sob H_0, de um valor igual ou mais extremo ao da estatística do teste observada (**valor-de-p**). Mais extremo: mais evidência contra H_0.

Se o valor-de-p obtido é bem pequeno, por exemplo, 0.05, isto quer dizer que se H_0 é verdadeira, então seria incomum obter uma amostra com os resultados como o observado.

Um valor-de-p muito baixo traz fortes evidências contra H_0.

Conclusão

Se a senhora acertou 5 xícaras:

$$P(X = 5) = \frac{\binom{6}{5}\binom{6}{1}}{\binom{12}{6}} = 3/77$$

Calculamos a probabilidade de um valor igual ou mais extremo ao da estatística do teste observada (**valor-de-p**). Mais extremo: mais evidência contra H_0.

Se a senhora tivesse acertado 6, seria ainda mais evidência contra H_0, de forma que o valor de p é calculado como:

$$P(X = 5) + P(X = 6) = 3/77 + 1/924 = 37/924$$

Se este valor for considerado baixo, temos evidências, baseando-se no experimento realizado, para rejeitar H_0.

Nível de significância - Erro tipo I

Nível de significância α também conhecido como **probabilidade de Erro do Tipo I**:

$$P(\text{Rejeito } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira})$$

Em um teste de hipóteses, definimos um α, que é o erro que estamos dispostos a cometer rejeitando a H_0 quando ela é verdadeira.

Desta forma, quando meu p-valor é menor do que α, encontramos evidências para rejeitar H_0.

Leituras:

- David Salsburg - Uma senhora toma chá: Como a estatística revolucionou a ciência no século XX
- Dama apreciadora de chá

Slides produzidos por:

- Samara Kiihl