ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 10

Esperança e Variância - variável aleatória discreta

Variância: variável aleatória discreta

- Vimos que a esperança nos dá a média ponderada de todos os resultados possíveis de uma v.a..
- No entanto, a esperança não descreve a dispersão dos dados.
- Considere as seguintes v.a.'s:

$$U = 0, \text{ com probabilidade } 1$$

$$V = \begin{cases} -1, & \text{com prob. } 1/2 \\ 1, & \text{com prob. } 1/2 \end{cases} \quad \text{e} \quad W = \begin{cases} -10, & \text{com prob. } 1/2 \\ 10, & \text{com prob. } 1/2 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(W) = 0$$

No entanto, claramente a dispersão é bem diferente para as três variáveis.

Variância: variável aleatória discreta

Queremos uma medida para quantificar quão distantes os valores da v.a. X estão da sua esperança.

Definição: Se X é uma v.a. com esperança $\mathbb{E}(X) = \mu$, então a variância de X é:

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$$

Notação: $\sigma^2 = Var(X)$

- Se X é uma v.a. discreta assumindo valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com respectivas probabilidades $P(X = x_i) = p_i$, então:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

Propriedade Geral da Variância

Definição: $Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$

Uma forma alternativa de calcular a variância é usando a fórmula:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) &= \mathbb{E}([X - \mu]^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mu^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2
\end{aligned}$$

Exemplo

Encontre $Var(X)$, onde X é uma v.a. tal que:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{com probabilidade } 1-p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 1 \times p + 0 \times (1-p) = p \\ Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - p^2 \end{aligned}$$

Como calcular a $\mathbb{E}(X^2)$?

$$X^2 = \begin{cases} 1^2, & \text{com probabilidade } p \\ 0^2, & \text{com probabilidade } 1-p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= 1 \times p + 0 \times (1-p) = p \\ Var(X) &= p - p^2 = p(1-p) \end{aligned}$$

Propriedades da Esperança

1. Para qualquer v.a. X e constantes a e b:

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

   Casos particulares:

   - $\mathbb{E}(X + b) = \mathbb{E}(X) + b$
   - $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$

2. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

Propriedades da Esperança

Proposição: Se X é uma v.a. discreta com valores x_i e função de massa $p(x_i)$, então para qualquer função g:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$$

Exemplo: Seja X uma v.a. tal que:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times p + 0^2 \times (1 - p) = p$$

Propriedades da Variância

1. Para qualquer v.a. X e constantes a e b:

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

   Casos particulares:

   - $Var(X + b) = Var(X)$
   - $Var(aX) = a^2 Var(X)$

2. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

Medidas de posição para v.a.'s discretas

- A **média, valor esperado ou esperança** de uma variável aleatória discreta X, cuja f.d.p. é dada por $P(X = x_i) = p_i$ é dada pela expressão:

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = \sum_{i \geq 1} x_i p_i$$

- A **mediana** (Md) é o valor que satisfaz:

$$P(X \geq Md) \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P(X \leq Md) \geq \frac{1}{2}$$

- A **moda** (Mo) é o valor da variével X que tem maior probabilidade de ocorrência:

$$P(X = Mo) = \max\{p_1, p_2, \ldots\}$$

Medidas de posição para v.a.'s discretas

Exemplo: considere a v.a. discreta X, tal que:

X	-5	10	15	20
$P(X = x)$	0.3	0.2	0.4	0.1

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = (-5) \times 0.3 + 10 \times 0.2 + 15 \times 0.4 + 20 \times 0.1 = 8.5$$

$$Mo(X) = 15$$

$P(X \leq 10) = P(X \geq 15) = 0.5$, então a mediana é $Md(X) = \frac{10+15}{2} = 12.5$

Obs: note que nem a média (8.5) nem a mediana (12.5) são valores assumidos pela variável X.

Medidas de posição para v.a.'s discretas

Exemplo: considere a v.a. X tal que:

X	2	5	8	15	20
$P(X = x)$	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

$$\mu_X = 10.3$$

$$Mo(X) = 5$$

$$Md(X) = 8$$

Medidas de posição para v.a.'s discretas

Exemplo: Considere a v.a. X do slide anterior e seja $Y = 5X - 10$

Y	0	15	30	65	90
$P(Y = y)$	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

$$\mu_Y = 41.5, \qquad Mo(Y) = 15 \qquad \text{e} \qquad Md(Y) = 30$$

Note que, como $Y = 5X - 10$:

$$\mu_Y = 5\mu_X - 10 = 5 \times 10.3 - 10 = 41.5$$

$$Mo(Y) = 5Mo(X) - 10 = 5 \times 5 - 10 = 15$$

$$Md(Y) = 5Md(X) - 10 = 5 \times 8 = 10 = 30$$

Exemplo

Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco pretas.

Retire três bolas, sem reposição, e defina a variável aleatória X igual ao número de bolas pretas.

Obtenha a distribuição de X. Calcule a esperança e a variância.

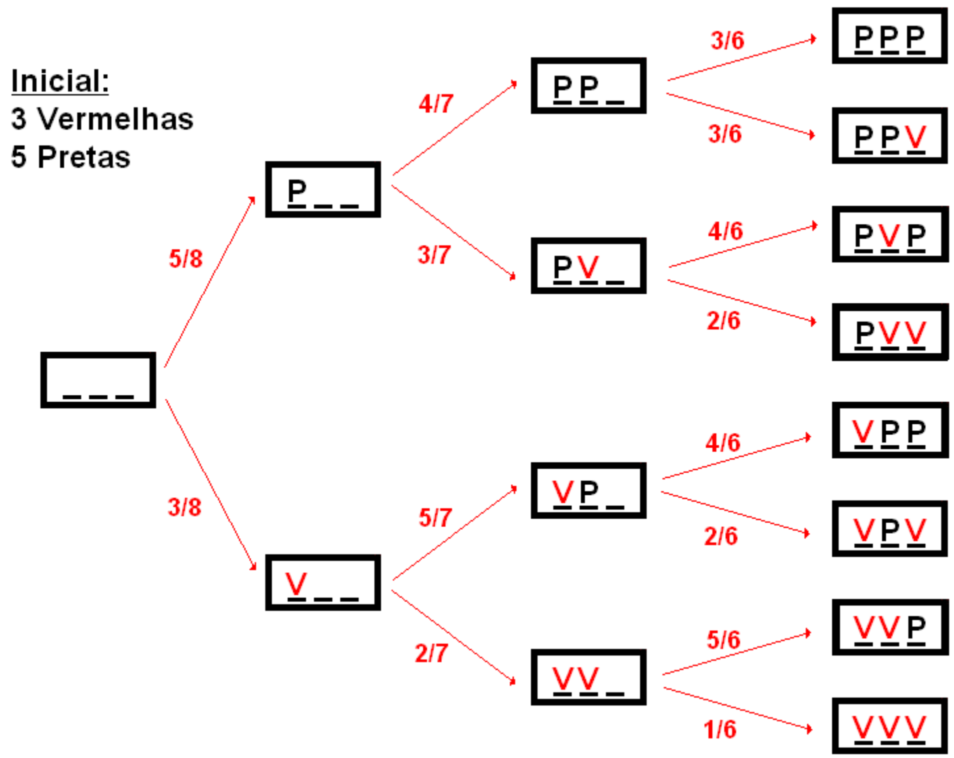
Fonte: Morettin | Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 135.

Repare que não há reposição:

- a primeira extração tem 5 possibilidades em 8 de ser uma bola preta;
- a segunda terá 5 em 7 se a primeira for vermelha, ou 4 em 7 se a primeira foi preta, e assim por diante.

Exemplo (continuação)

Retirar 3 bolas, sem reposição, de uma urna com 3 bolas vermelhas e 5 pretas



Exemplo (continuação)

A partir do gráfico, podemos construir uma tabela com os eventos do espaço amostral:

Extrações	Probabilidade	$X = x$
PPP	$5/8 \times 4/7 \times 3/6 = 5/28$	3
PPV	$5/8 \times 4/7 \times 3/6 = 5/28$	2
PVP	$5/8 \times 3/7 \times 4/6 = 5/28$	2
VPP	$3/8 \times 5/7 \times 4/6 = 5/28$	2
PVV	$5/8 \times 3/7 \times 2/6 = 5/56$	1
VPV	$3/8 \times 5/7 \times 2/6 = 5/56$	1
VVP	$3/8 \times 2/7 \times 5/6 = 5/56$	1
VVV	$3/8 \times 2/7 \times 1/6 = 1/56$	0

Exemplo (continuação)

Como X é o número de bolas pretas, temos que:

Somando as probabilidades dos eventos, encontradas anteriormente, obtemos a função de distribuição de X, $p_X(x)$.

Eventos	$X = x$	$p_X(x) = P(X = x)$
$\{VVV\}$	0	0.02
$\{VVP\} \cup \{VPV\} \cup \{PVV\}$	1	0.27
$\{PPV\} \cup \{PVP\} \cup \{VPP\}$	2	0.53
$\{PPP\}$	3	0.18

Exemplo (continuação)

Podemos calcular a esperança e a variância de X a partir de sua função de probabilidade:

$$\begin{aligned}\mu &= \mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{3} x p_X(x) \\ &= 0 \times 0.02 + 1 \times 0.27 + 2 \times 0.53 + 3 \times 0.18 = 1.87\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(X) &= \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sum_{x=0}^{3} (x-\mu)^2 p_X(x) \\ &= (0-1.87)^2 \times 0.02 + (1-1.87)^2 \times 0.27 + (2-1.87)^2 \times 0.53 + (3-1.87)^2 \times 0.18 = 0.51\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= (0^2 \times 0.02 + 1^2 \times 0.27 + 2^2 \times 0.53 + 3^2 \times 0.18) - (1.87)^2 = 0.51\end{aligned}$$

Exemplo

O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidade:

T	2	3	4	5	6	7
$P(T = t)$	0.1	0.1	0.3	0.2	0.2	0.1

1. Calcule o tempo médio de processamento.

2. Cada peça processada paga ao operador $\$2.00$ mas, se ele processa a peça em menos de 6 minutos, ganha $\$0.50$ por minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 4 minutos, ganha um bônus de $\$1.00$. Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a. S: quantia paga por peça.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 140.

Exemplo (continuação)

1. Tempo médio de processamento

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{t=2}^{7} tP(T = t)$$
$$= 2 \times 0.1 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.3 + 5 \times 0.2 + 6 \times 0.2 + 7 \times 0.1 = 4.6$$

2. Podemos trocar os valores na tabela do tempo, pelo total ganho por peça. Note, contudo, que o operário receberá $\$2.00$ no evento $\{T = 6\} \cup \{T = 7\}$, logo somamos suas probabilidades. Seja S a v.a. “ganho final”.

S	$\$4.00$	$\$3.50$	$\$3.00$	$\$2.50$	$\$2.00$
$P(S = s)$	0.1	0.1	0.3	0.2	0.3

Exemplo (continuação)

Obtemos a média e a variância de S através da definição:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \sum_s sP(S = s)\\ &= 4 \times 0.1 + 3.5 \times 0.1 + 3 \times 0.3 + 2.5 \times 0.2 + 2 \times 0.3 = 2.75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S^2) &= \sum_s s^2 P(S = s)\\ &= 16 \times 0.1 + 12.25 \times 0.1 + 9 \times 0.3 + 6.25 \times 0.2 + 4 \times 0.3 = 7.975\end{aligned}$$

Então,

$$\mathrm{Var}(S) = 7.975 - (2.75)^2 = 0.4125$$

Principais Modelos Discretos

Uniforme Discreta

veja   Copa do Mundo   Seleção Brasileira   Tabela da Copa   PIS   Eleiçõ

Economia

Apesar de resultado inusitado, quatro pessoas levam Mega-Sena de sábado

Números sorteados em concurso 2052 formam quase uma sequência: 50 - 51 - 56 - 57 - 58 – 59

Por **Da Redação**

24 jun 2018, 11h02 - Publicado em 24 jun 2018, 09h35

Fonte: [Veja, 24/06/2018]

Uniforme Discreta

Exemplo: Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93.

Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?

- espalhar os números é a melhor forma de ganhar o sorteio?
- assumindo honestidade da rifa, todos os números têm a mesma probabilidade de ocorrência, com $\frac{1}{100}$ para cada um.
- como eu e meu colega temos 5 bilhetes, temos a mesma probabilidade de ganhar a rifa: $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.
- assim, a probabilidade de ganhar depende somente da quantidade de bilhetes que se tem na mão, independente da numeração.

Uniforme Discreta

- A v.a. discreta X, assumindo valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$, segue uma distribuição uniforme discreta se, e somente se, cada valor possível tem a mesma probabilidade de ocorrer, isto é,

$$P(X = x_i) = p(x_i) = \frac{1}{k}, \quad \forall\ 1 \leq i \leq k$$

Exemplo: lançamento de um dado honesto de 6 faces

X	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Uniforme Discreta

A média e a variância são dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 P(X = x_i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mathbb{E}(X))^2$$

ou

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j \right)^2 = \frac{1}{k} \left[\sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^{k} x_j \right)^2 \right]$$

Uniforme Discreta

Exemplo: lançamento de um dado honesto de 6 faces

X	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Calculando a esperança e a variância de X:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$Var(X) = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = 2.92$$

Uniforme Discreta

Cálculo da função de distribuição acumulada (f.d.a.) de uma variável uniforme discreta:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \frac{1}{k} = \frac{\#(x_i \leq x)}{k}$$

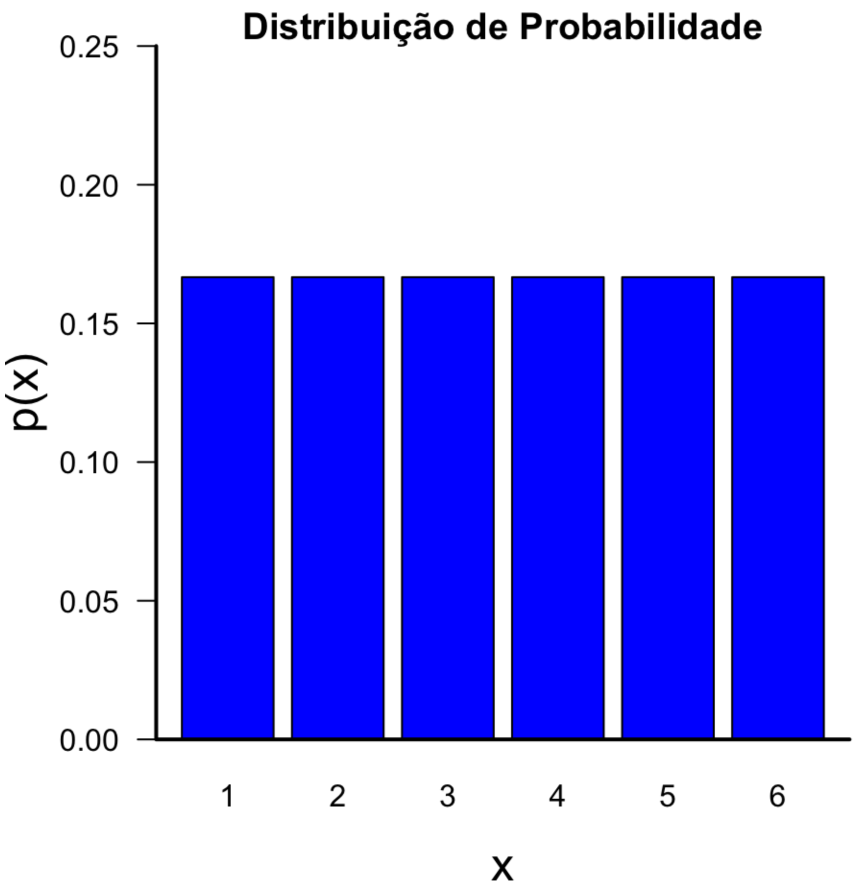
Exemplo: voltando ao exemplo do lançamento de um dado honesto de 6 faces

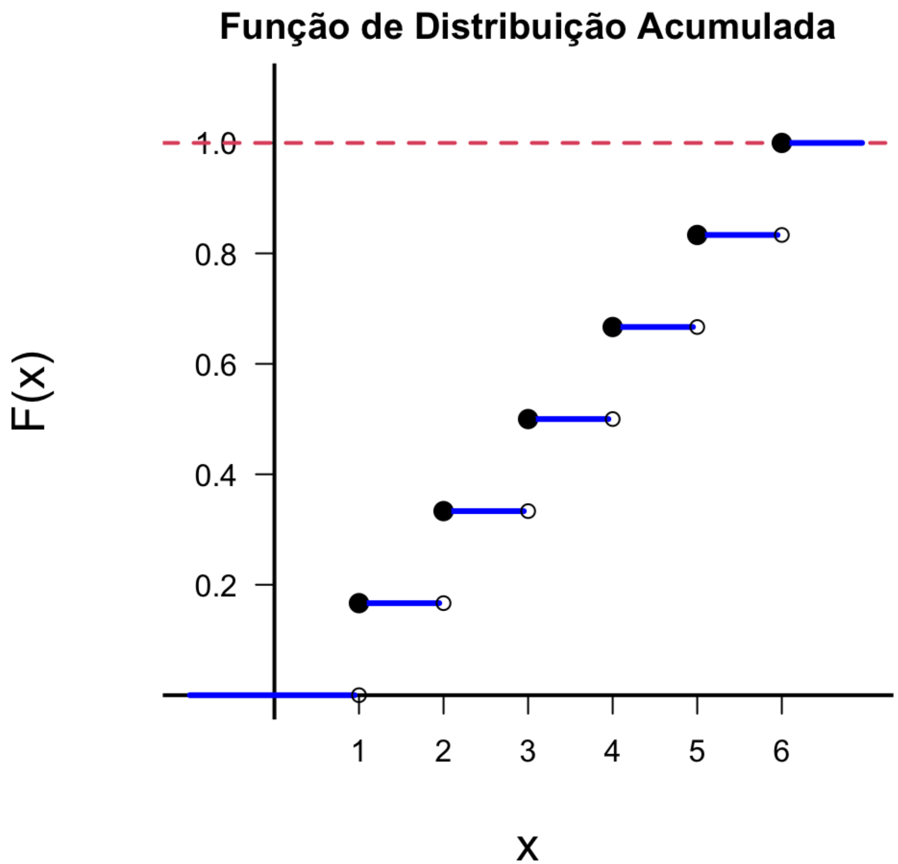
- $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$
- $F(2.5) = P(X \leq 2.5) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$

Uniforme Discreta - f.d.a

X	$p(x)$	$F(x)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$

Uniforme Discreta - Gráficos





Bernoulli

Em muitas aplicações, cada observação de um experimento aleatório é **binária**: tem apenas dois resultados possíveis.

Por exemplo, uma pessoa pode:

- aceitar ou recusar uma oferta de cartão de crédito de seu banco.
- votar sim ou não em uma assembleia.
- ir ou não almoçar no bandejão.
- levar ou não um guarda-chuva num dia nublado.

Modelo Bernoulli

- Considere um experimento aleatório com dois resultados possíveis: **sucesso** e **fracasso**.
- Os termos “sucesso” e “fracasso” são apenas rótulos para os dois resultados possíveis.
- Seja p a probabilidade de sucesso.
- **Exemplo:** lançar uma moeda e verificar se cai cara ou coroa. Consideramos como sucesso, a obtenção de cara. Se a moeda é honesta, $p = 1/2$.
- Esse tipo de experimento é conhecido como **Ensaio de Bernoulli**.

Modelo Bernoulli

- **Exemplo:** lançar um dado, sendo “sucesso” o obtenção da face 6. Se o dado é honesto, a probabilidade de sucesso é $p = 1/6$.
- **Exemplo:** Uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade, e é perguntado a ela se concorda com um projeto.
- As possíveis respostas são apenas “Sim” ou “Não”.

$$\Omega = \{\text{Sim}, \text{Não}\}$$

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se a pessoa respondeu sim } (sucesso) \\ 0, & \text{caso contrário } (fracasso) \end{cases}$$

$$P(X = 1) = P(sucesso) = p \quad \rightarrow \quad P(X = 0) = P(fracasso) = 1 - p$$

Modelo Bernoulli

Seja X uma v.a. discreta assumindo apenas valores 0 e 1, onde $X = 1$ corresponde a sucesso e seja p a probabilidade de sucesso.

A distribuição de probabilidade de X é dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{se } x = 1 \\ 1 - p & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Ou de forma equivalente, podemos escrever como:

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad \text{para } x = 0, 1$$

Notação: $X \sim b(p)$

Bernoulli - Esperança e Variância

Se X é um v.a. Bernoulli, $X \sim b(p)$, então:

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{e} \quad Var(X) = p(1-p)$$

Demonstração:

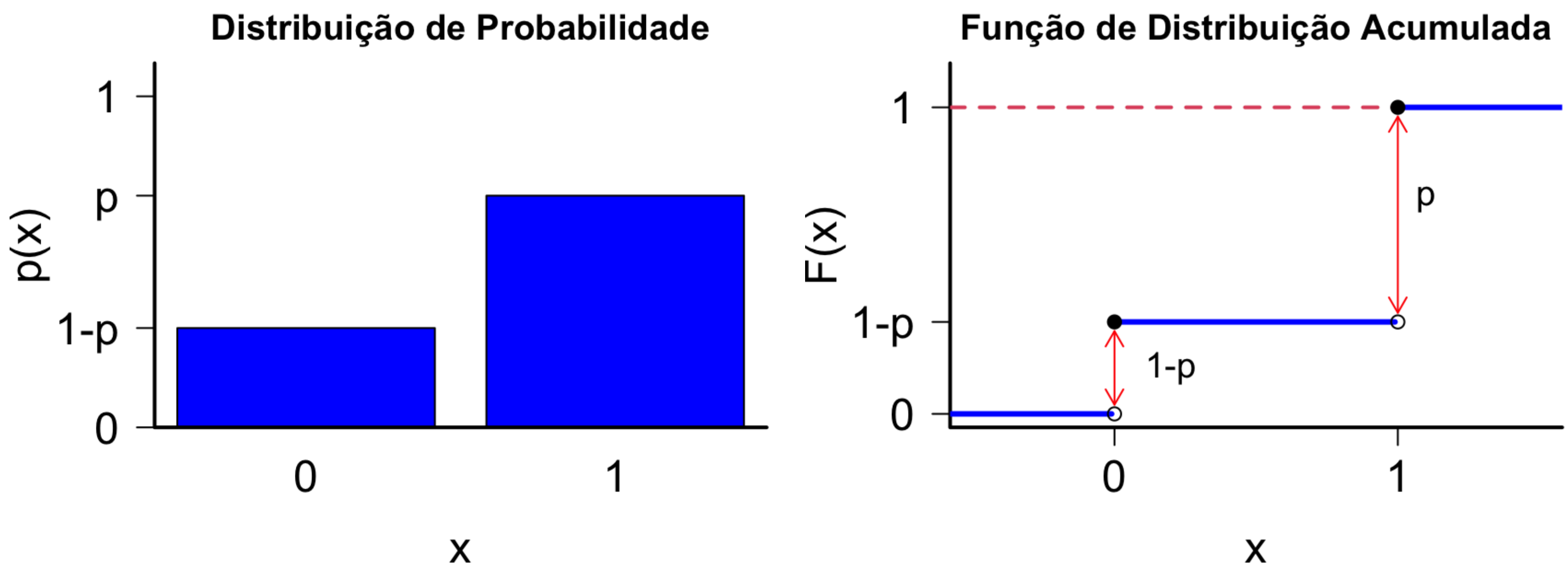
- **Esperança:** $\mathbb{E}(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$
- $\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$
- **Variância:**

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= p - p^2 = p(1-p) \end{aligned}$$

Bernoulli

A função de distribuição acumulada de uma v.a. Bernoulli é:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



Bernoulli

Exemplo: lançamos um dado e consideramos sucesso a obtenção da face 5

Supondo que o dado seja honesto, a probabilidade de sucesso é $p = 1/6$. Então:

$$P(X = x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x} \qquad \text{para } x = 0, 1$$
$$= \begin{cases} 5/6 & \text{se } x = 0 \\ 1/6 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

- Encontre a esperança e variância de X.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \qquad \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6}$$

$$Var(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6-1}{36} = \frac{5}{36}$$

Modelo Binomial

Ao obtermos uma amostra do experimento/fenômeno aleatório com observações binárias, podemos resumir os resultados usando o número ou a proporção de observações com o resultado de interesse.

Sob certas condições, a v.a. X que conta o número de vezes que um resultado específico ocorreu, dentre dois possíveis, tem uma distribuição de probabilidade chamada **Binomial**.

- Considere um experimento aleatório com espaço amostral Ω e o evento A.
- Vamos dizer que ocorreu sucesso se o evento A aconteceu. Se A não aconteceu ocorreu fracasso.
- Repetimos o experimento n vezes, de forma independente.
- Seja X o número de sucessos nos n experimentos.

Exemplo: vacinas

Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 80%.

Um grupo de 3 indivíduos é sorteado, dentre a população vacinada, e cada um é submetido a testes para averiguar se está imunizado.

Nesse caso, consideramos como sucesso a imunização.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{indivíduo i está imunizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pelo enunciado, sabe-se que $P(X_i = 1) = p = 0.8$.

Exemplo: vacinas

- Os indivíduos 1, 2 e 3 são independentes.
- As v.a.'s X_1, X_2 e X_3 são Bernoulli.
- Se o interesse está em estudar $X =$ número de indivíduos imunizados no grupo, X poderá assumir valores $\{0, 1, 2, 3\}$.
- Note que $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Exemplo: vacinas

evento	P(evento)	X
$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$	$(0.2)^3$	0
$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$	$(0.8)^3$	3

Modelo Binomial

Assim, as probabilidades de cada valor possível de X são:

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	$(0.2)^3$	$3 \times 0.8 \times (0.2)^2$	$3 \times (0.8)^2 \times 0.2$	$(0.8)^3$

O comportamento de X é completamente determinado pela função:

$$P(X = x) = \binom{3}{x}(0.8)^x(0.2)^{3-x}, \qquad x = 0, 1, 2, 3.$$

Binomial

Modelo Geral: Considere a repetição de n ensaios X_i Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso p.

A variável aleatória $X = X_1 + \ldots + X_n$ representa o total de sucessos e corresponde ao modelo Binomial com parâmetros n e p, ou seja, $X \sim Bin(n, p)$.

A probabilidade de se observar x é dada pela expressão geral:

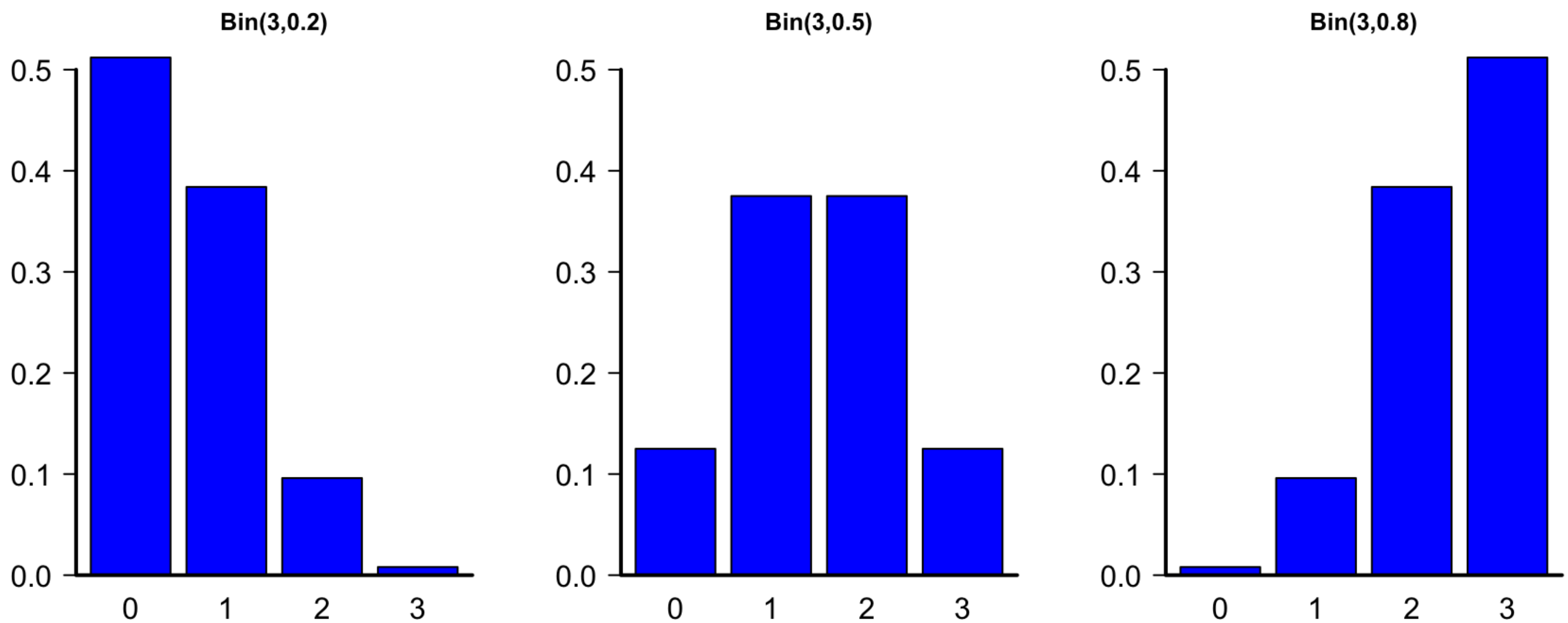
$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n$$

A esperança e variância de uma v.a. Binomial são dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \text{e} \qquad Var(X) = np(1-p)$$

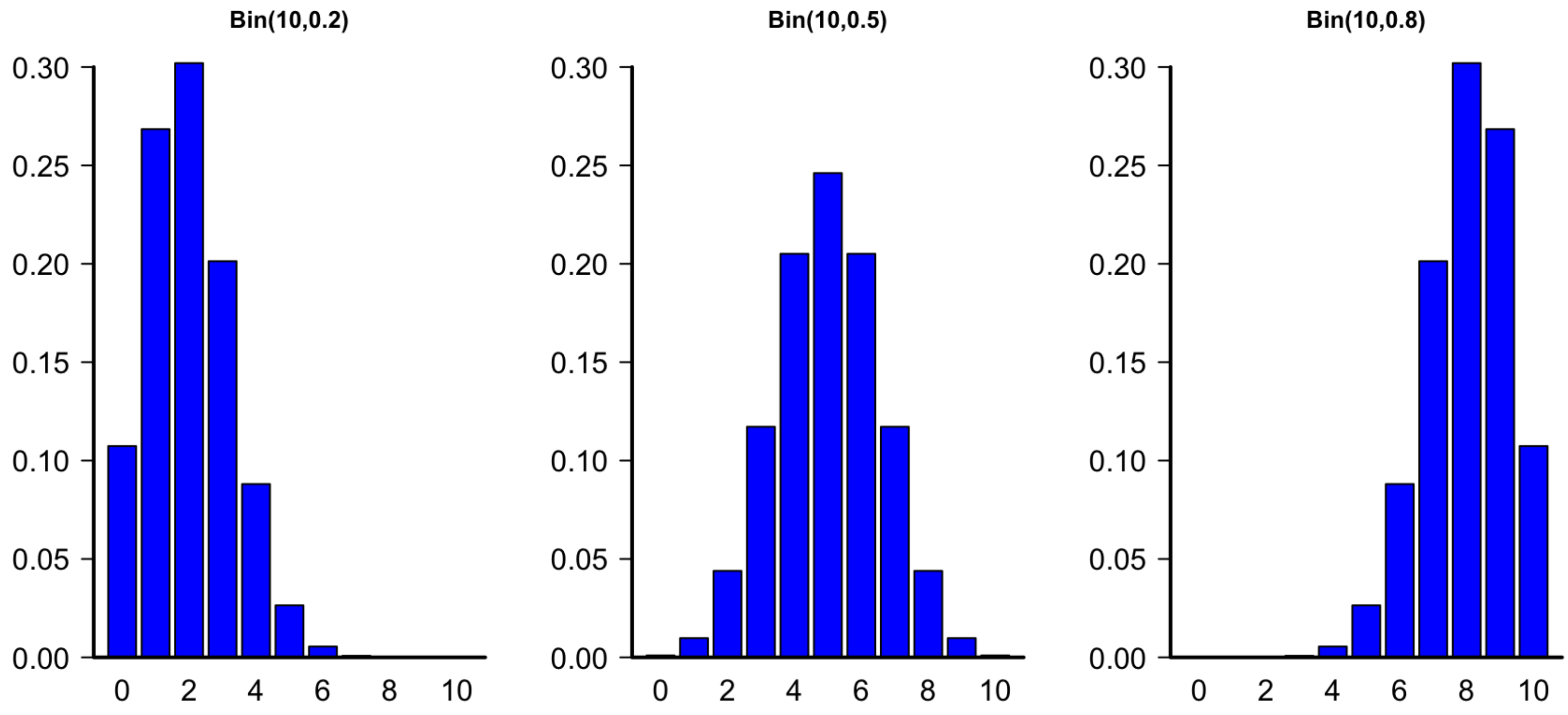
Modelo Binomial

Distribuição de probabilidade de uma $Bin(3, p)$, com $p = 0.2, 0.5$ e 0.8.



Modelo Binomial

Distribuição de probabilidade de uma $Bin(10, p)$, com $p = 0.2, 0.5$ e 0.8.



Exemplo: Vacina

- No exemplo da vacina, temos então que o número de indíviduos imunizados segue uma distribuição Binomial com $n = 3$ e $p = 0.8$

$$X \sim Bin(3, 0.8)$$

- Qual a probabilidade de que dentre os 3 indíviduos, nenhum tenha sido imunizado?

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}(0.8)^0(0.2)^3 = 0.008$$

- Encontre a esperança e variância:

$$\mathbb{E}(X) = 3 \times 0.8 = 2.4 \qquad \text{e} \qquad Var(X) = 3 \times 0.8 \times 0.2 = 0.48$$

Exemplo: Inspeção

Um inspetor de qualidade extrai uma amostra aleatória de 10 tubos armazenados num depósito onde, de acordo com os padrões de produção, se espera um total de 20% de tubos defeituosos.

Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 tubos extraídos sejam defeituosos?

Se X denotar a variável “número de tubos defeituosos em 10 extrações independentes e aleatórias”, qual o seu valor esperado? Qual a variância?

Exemplo: Inspeção

Note que a variável aleatória X = número de tubos defeituosos em 10 extrações tem distribuição binomial, com parâmetros $n = 10$ e $p = 0.2$.

Então, “não mais do que dois tubos defeituosos” é o evento $\{X \leq 2\}$.

Sabemos que, para $X \sim Bin(10, 0.2)$

$$P(X = x) = \binom{10}{x}(0.2)^x(0.8)^{10-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, 10$$

e que

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= (0.8)^{10} + 10(0.2)(0.8)^9 + 45(0.2)^2(0.8)^8 = 0.678 \end{aligned}$$

Exemplo: Inspeção

Se $X \sim Bin(n, p)$, então $\mathbb{E}(X) = np$ e $Var(X) = np(1 - p)$

Então:

$\mathbb{E}(X) = 10(0.2) = 2$

$Var(X) = 10(0.2)(0.8) = 1.6$

Quando se encontram quatro ou mais tubos defeituosos, o processo de produção é interrompido para revisão. Qual é a probabilidade que isto aconteça?

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\
&= 1 - P(X \leq 3) \\
&= 1 - 0.879 = 0.121
\end{aligned}
$$

Exemplo: Comprador A ou B?

Exemplo: Um industrial fabrica peças, das quais 1/5 são defeituosas. Dois compradores **A** e **B** classificaram um grande lote de peças adquiridas em categorias I e II, pagando $\$1.20$ e $\$0.80$ por peça, respectivamente, do seguinte modo:

- **Comprador A**: retira uma amostra de cinco peças; se encontrar mais que uma defeituosa, classifica como II.
- **Comprador B**: retira uma amostra de dez peças; se encontrar mais que duas defeituosas, classifica como II.

Em média, qual comprador oferece mais lucro?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 159.

Exemplo: Comprador A ou B?

Sabemos que 1/5 das peças são defeituosas.

Podemos nos concentrar na probabilidade dos vendedores julgarem um lote como tipo I ou II.

Seja X o número de peças defeituosas em n testes.

O experimento do **comprador A** tem distribuição $X_A \sim Bin(5, 1/5)$ enquanto o experimento do **comprador B** tem distribuição $X_B \sim Bin(10, 1/5)$.

Para o **comprador A**, temos que:

$$\begin{aligned} P(X_A > 1) &= 1 - P(X_A = 0) - P(X_A = 1) \\ &= 1 - \binom{5}{0}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)^4 = 0.263 \end{aligned}$$

Exemplo: Comprador A ou B?

De modo similar, para o **comprador B** temos:

$$P(X_B > 2) = 1 - \binom{10}{0}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{10} - \binom{10}{1}\frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{9} - \binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{8} = 0.322$$

Como o segundo comprador irá classificar o lote como II com maior probabilidade que o primeiro, ele é o que oferece menor lucro para o fornecedor.

Mas podemos verificar o lucro esperado do vendedor.

Exemplo: Comprador A ou B?

Preço por peça na categoria I: \$1.20. Preço por peça na categoria II: \$0.80.

Se o industrial decidir vender o lote para o **comprador A**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro A}) = 1.20 \times 0.737 + 0.80 \times 0.263 \approx 1.09$$

Ou seja, ele irá lucrar em média $\$1.09$ por peça.

Já se ele vender para o **comprador B**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro B}) = 1.20 \times 0.678 + 0.80 \times 0.322 \approx 1.07$$

que é um lucro dois centavos inferior.

Portanto, é mais interessante ao industrial que o comprador A examine mais peças.

Leituras

- Ross: capítulo 5
- Magalhães: capítulo 3

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Larissa Matos
- Benilton Carvalho