



# ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 9

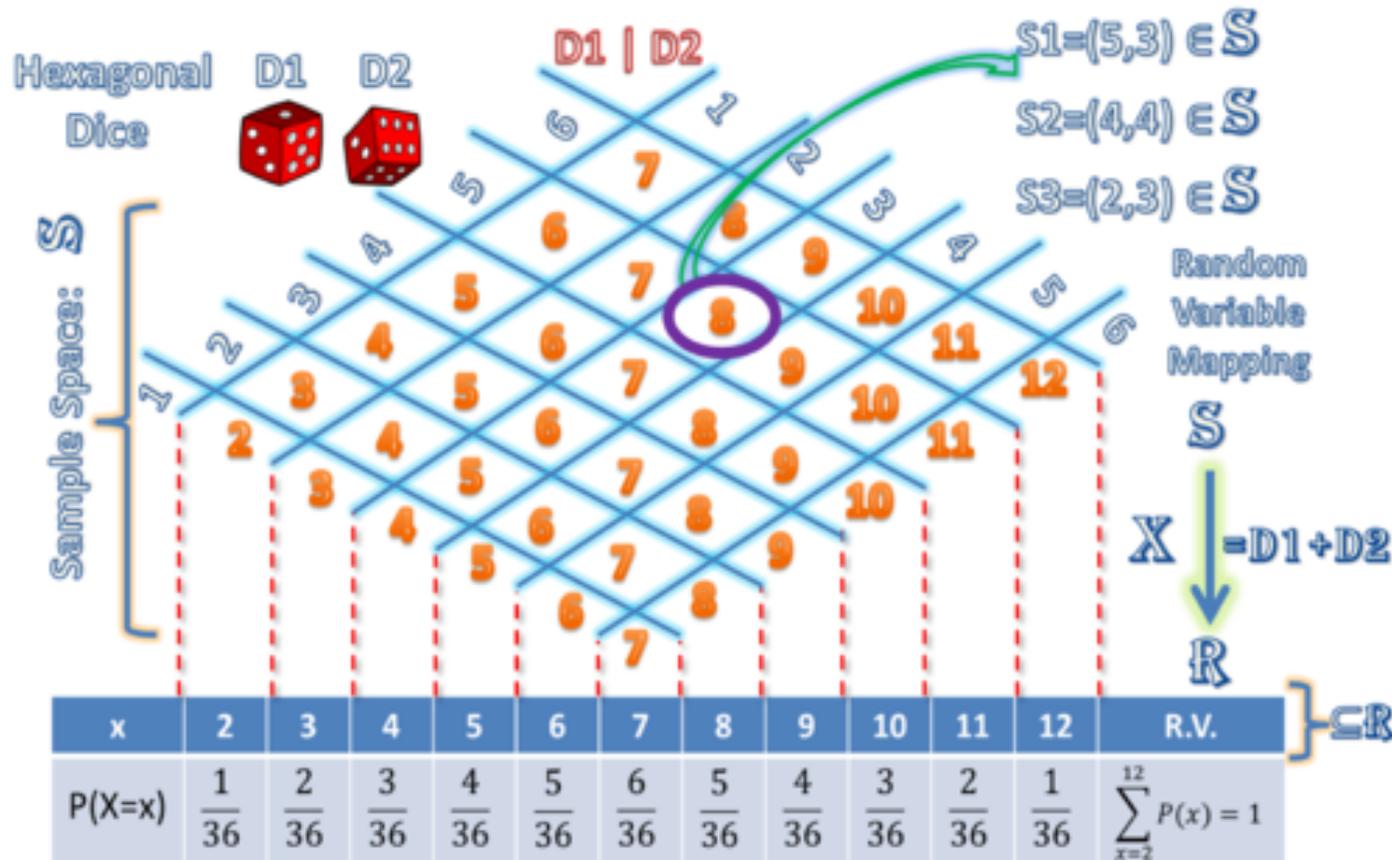
# Variável Aleatória Discreta

# Variável Aleatória

- Em um experimento aleatório, muitas vezes não estamos interessados nos detalhes do resultado do evento, mas sim em alguma quantidade numérica obtida a partir do experimento.
- Ex: lançamento de dois dados. O interesse pode estar apenas na soma, não nos resultados individuais dos dados.
- Quantidades de interesse que são determinadas a partir do resultado de experimento aleatório são denominadas **variáveis aleatórias**.
- Cada resultado possível de uma variável aleatória (v.a.) tem associado uma probabilidade. O conjunto de todos os resultados possíveis e as respectivas probabilidades é denominado **distribuição de probabilidade**.

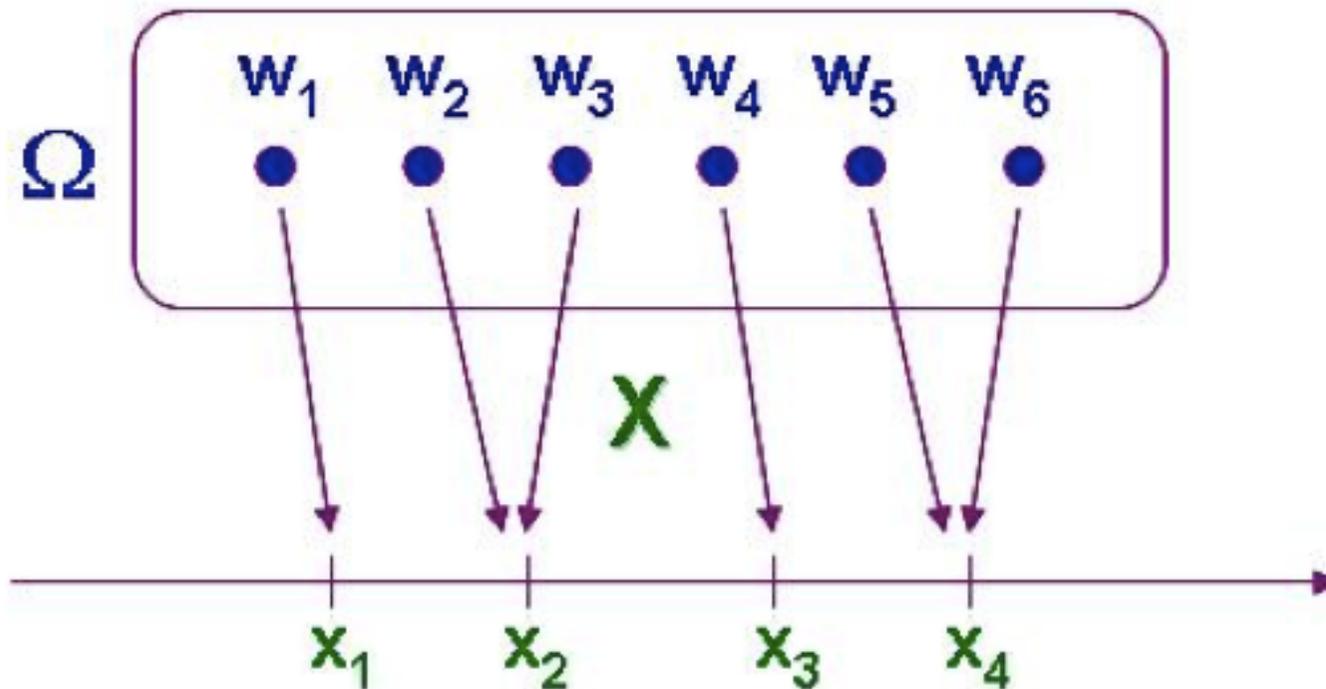
# Exemplo: Lançamento de dois dados

Estamos interessados na soma dos resultados.



# Definição: Variável Aleatória Discreta

Uma função  $X$  que associa a cada elemento do espaço amostral um valor num conjunto enumerável de pontos da reta é denominada **variável aleatória discreta**.



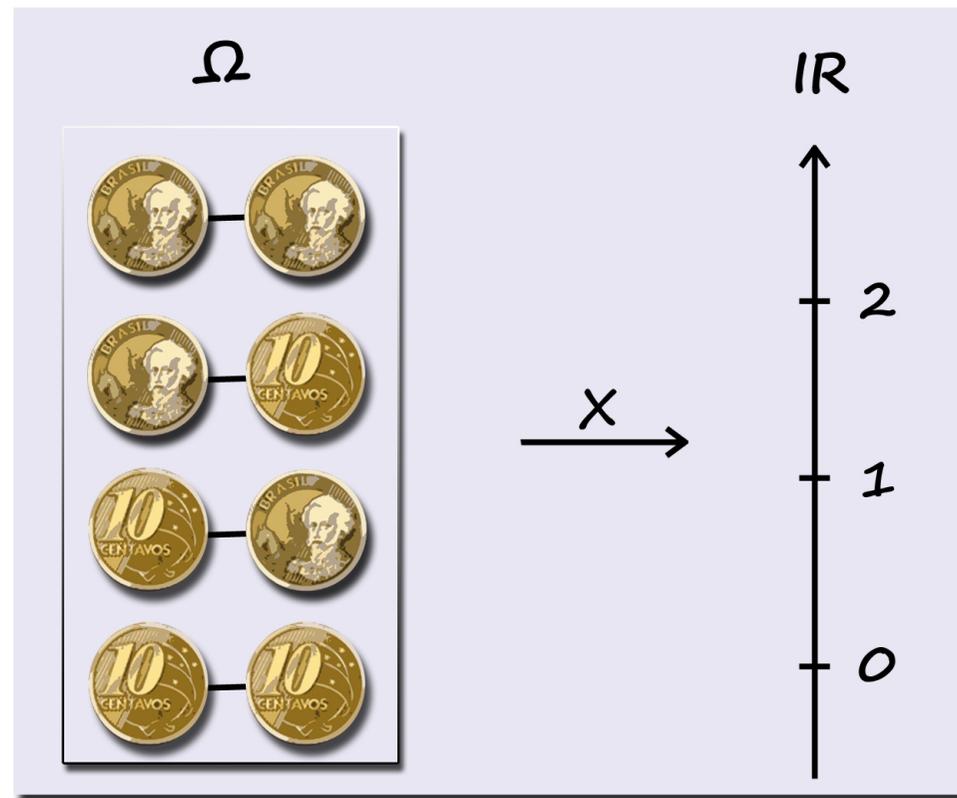
# Exemplo: Lançamento de uma moeda

$X = 1$  se cara e  $X = 0$  se coroa



# Exemplo: Lançamento de uma moeda duas vezes

$X$  é a soma dos resultados (coroa é 0 e cara é 1).



# Distribuição de Probabilidade

# Distribuição de Probabilidade - v.a. discreta

- Quando a v.a. assume valores inteiros: v.a. **discreta**.
- A distribuição de probabilidade associa uma probabilidade  $P(X = x)$  para cada valor possível,  $x$ , da variável aleatória  $X$ .
- Para cada valor de  $x$ ,  $0 \leq P(X = x) \leq 1$ .
- Soma das probabilidades de todos os valores possíveis de  $X$  é igual a 1.

# Distribuição de Probabilidade - v.a. discreta

- Seja  $X$  uma v.a. discreta com  $n$  valores possíveis denotados por  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
- $P(X = x_i)$  denota a probabilidade de que a v.a.  $X$  assumira o valor  $x_i$ .
- O conjunto de todas essas probabilidades (para cada  $x_i$ ) representa a distribuição de probabilidade de  $X$ .

$X$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...
$P(X = x)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$P(X = x_3)$	...

- 
- Como  $X$  só pode assumir valores entre  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , temos que:

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

# Exemplo

Suponha que  $X$  seja uma v.a. discreta que assume os valores 1, 2 e 3.

Se  $P(X = 1) = 0.4$  e  $P(X = 2) = 0.1$ , qual o valor de  $P(X = 3)$ ?

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

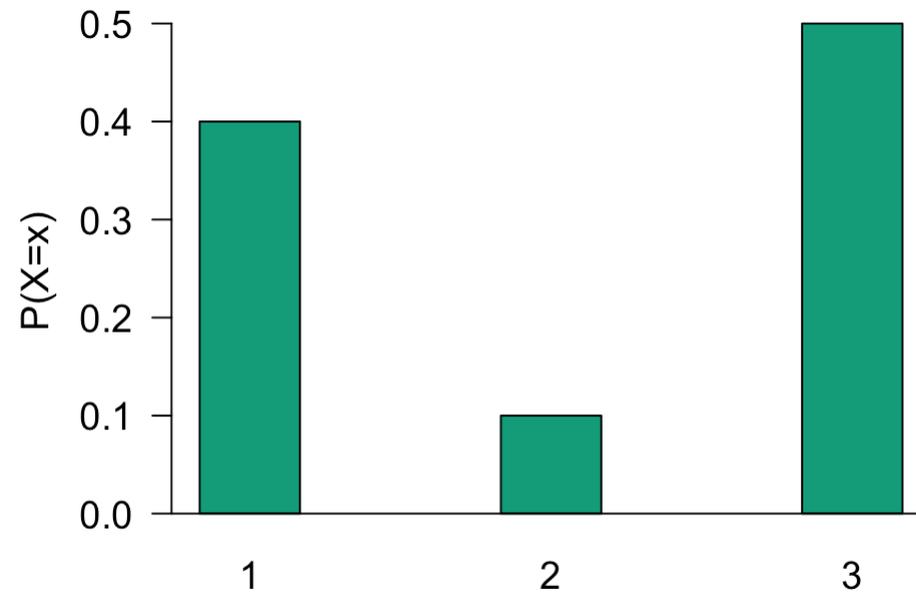
$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

$$0.4 + 0.1 + P(X = 3) = 1$$

$$P(X = 3) = 0.5$$

# Distribuição de Probabilidade

Podemos representar a distribuição de probabilidade com o seguinte gráfico:



A altura de cada barra representa a probabilidade daquele valor.

# Exemplo: Vendedor

Um vendedor de enciclopédias visita cada casa duas vezes.

Com anos de experiência, ele acredita que a probabilidade de uma venda logo na primeira visita é 0.3.

Já na segunda visita, ele acredita que a probabilidade de venda seja 0.6. Ele acredita também que o resultado em cada visita seja independente.



Qual é a distribuição de probabilidade da v.a.  $X$ : número de vendas feitas em uma casa?

# Exemplo: Vendedor

Considere os eventos:

- $V_1 = \{\text{venda na primeira visita}\}$
- $V_2 = \{\text{venda na segunda visita}\}$

Espaço amostral do fenômeno aleatório:

$$\Omega = \{(V_1^c \cap V_2^c), (V_1 \cap V_2^c), (V_1^c \cap V_2), (V_1 \cap V_2)\}$$

Então, a v.a.  $X$  pode assumir os valores 0, 1 ou 2.

Temos  $X = 0$  se nenhuma venda ocorrer nas duas visitas.

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(V_1^c \cap V_2^c) \stackrel{ind}{=} P(V_1^c)P(V_2^c) \\ &= [1 - P(V_1)][1 - P(V_2)] = (1 - 0.3)(1 - 0.6) = 0.28 \end{aligned}$$



# Exemplo: Vendedor

- $X = 1$  quando ocorre uma venda apenas na primeira visita ou uma venda apenas segunda visita.

Então,

$$\begin{aligned}P(X = 1) &= P[(V_1 \cap V_2^c) \cup (V_1^c \cap V_2)] \\ &= P(V_1 \cap V_2^c) + P(V_1^c \cap V_2) \\ &\stackrel{ind}{=} P(V_1)P(V_2^c) + P(V_1^c)P(V_2) \\ &= (0.3)(1 - 0.6) + (1 - 0.3)(0.6) \\ &= 0.54\end{aligned}$$



# Exemplo: Vendedor

- $X = 2$  quando ocorre uma venda nas duas visitas.

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(V_1 \cap V_2) \\ &\stackrel{ind}{=} P(V_1)P(V_2) = (0.3)(0.6) = 0.18 \end{aligned}$$

Satisfaz a propriedade:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 P(X = i) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0.28 + 0.54 + 0.18 = 1 \end{aligned}$$



$X$	0	1	2
$P(X = x)$	0.28	0.54	0.18

# Exemplo: Comissão

O Departamento de Estatística é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres.

Uma comissão de 3 professores será constituída sorteando, ao acaso, três membros do departamento.

Qual é a probabilidade da comissão ser formada por pelo menos duas mulheres?

Seja  $X$  o número de mulheres na comissão.  $X$  pode assumir os valores: 0, 1, 2 e 3.

Seja  $X$  o número de mulheres na comissão.  $X$  pode assumir os valores: 0, 1, 2 e 3.

$$P(X = 0) = \frac{\binom{21}{3} \binom{14}{0}}{\binom{35}{3}} = 0.203$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{21}{2} \binom{14}{1}}{\binom{35}{3}} = 0.450$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{21}{1} \binom{14}{2}}{\binom{35}{3}} = 0.291$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{21}{0} \binom{14}{3}}{\binom{35}{3}} = 0.056$$

Veja que  $\sum_{i=0}^3 P(X = i) = 1$ .

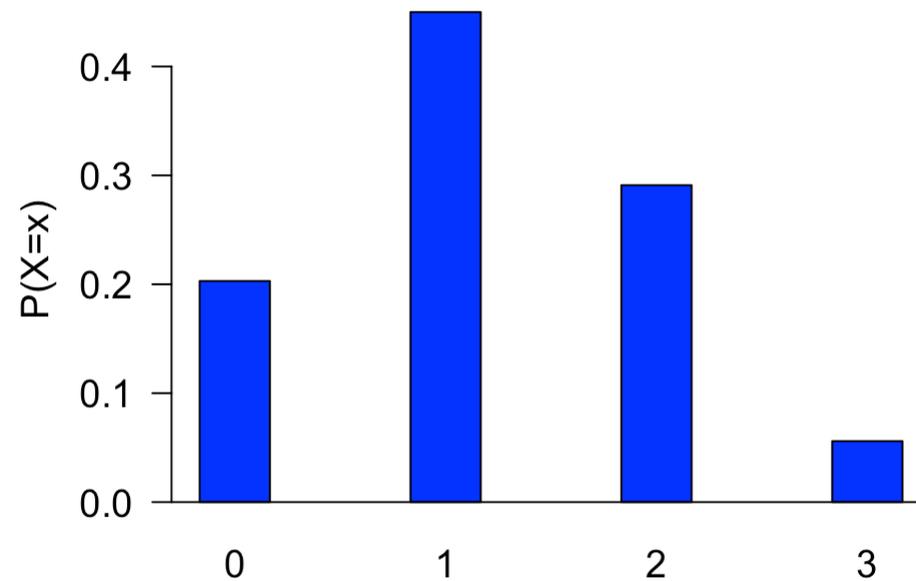
Probabilidade da comissão ter pelo menos duas mulheres:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.347$$

# Exemplo: Comissão

A distribuição de probabilidade de  $X$  é dada por:

$X$	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.203	0.450	0.291	0.056



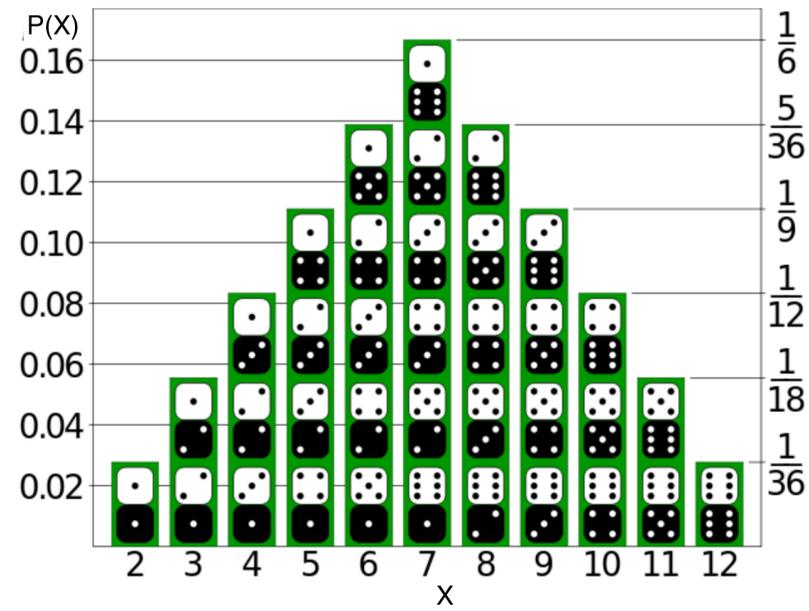
# Exemplo: Comissão

Outra maneira para calcular as probabilidades:

<b>Espaço amostral</b>	<b>Probabilidade</b>	<b>X</b>
<b>(HHH)</b>	$\frac{21}{35} \times \frac{20}{34} \times \frac{19}{33} = 0,203$	<b>0</b>
<b>(HHM)</b>	$\frac{21}{35} \times \frac{20}{34} \times \frac{14}{33} = 0,150$	<b>1</b>
<b>(HMH)</b>	$\frac{21}{35} \times \frac{14}{34} \times \frac{20}{33} = 0,150$	<b>1</b>
<b>(MHH)</b>	$\frac{14}{35} \times \frac{21}{34} \times \frac{20}{33} = 0,150$	<b>1</b>
<b>(HMM)</b>	$\frac{21}{35} \times \frac{14}{34} \times \frac{13}{33} = 0,097$	<b>2</b>
<b>(MHM)</b>	$\frac{14}{35} \times \frac{21}{34} \times \frac{13}{33} = 0,097$	<b>2</b>
<b>(MMH)</b>	$\frac{14}{35} \times \frac{13}{34} \times \frac{21}{33} = 0,097$	<b>2</b>
<b>(MMM)</b>	$\frac{14}{35} \times \frac{13}{34} \times \frac{12}{33} = 0,056$	<b>3</b>

# Exemplo: Lançamento de dois dados

Qual a probabilidade da soma ser menor do que 6?



$X$ : soma dos dados.

$$P(X < 6) = P(X = 5) + P(X = 4) + P(X = 3) + P(X = 2) = \frac{10}{36}$$

# Exemplo: Lançamento de dois dados

$Y$ : máximo resultado no lançamento de 2 dados.

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

$Y$	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$

# Exemplo: Lançamento de dois dados

$Z$ : diferença entre os pontos do segundo e do primeiro lançamento.


$Z$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
$P(Z = z)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	

# Exemplo: Construção

Na construção de um certo prédio, as fundações devem atingir 15 metros de profundidade, e para cada 5 metros de estacas colocadas, o operador anota se houve alteração no ritmo de perfuração previamente estabelecido.

Essa alteração é resultado de mudanças para mais ou para menos na resistência do subsolo.

Nos dois casos, medidas corretivas serão necessárias, encarecendo o custo da obra.

- com base em avaliações geológicas, admite-se que a probabilidade de ocorrência de alterações é de 0.1 para cada 5 metros.
- o custo básico inicial é de 100 UPCs (Unidades Padrão de Construção) e será acrescido de  $50k$ , com  $k$  representando o número de alterações observadas.

# Exemplo: Construção

- Como se comporta a variável Custo de Obra de fundações?
- Assumimos que as alterações ocorrem independentemente entre cada um dos três intervalos de 5 metros.
- $A$  = ocorrência de alterações em cada intervalo.
- 3 etapas  $\Rightarrow 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$  possibilidades.
- Espaço Amostral

$$\Omega = \{AAA, AAA^c, AA^cA, A^cAA, AA^cA^c, A^cAA^c, A^cA^cA, A^cA^cA^c\}$$

Evento	Probabilidade	Custo
$AAA$	$(0.1)^3 = 0.001$	250
$AA^c$	$(0.1)^2(0.9) = 0.009$	200
$AA^cA$	$(0.1)^2(0.9) = 0.009$	200
$A^cAA$	$(0.1)^2(0.9) = 0.009$	200
$AA^cA^c$	$(0.1)(0.9)^2 = 0.081$	150
$A^cAA^c$	$(0.1)(0.9)^2 = 0.081$	150
$A^cA^cA$	$(0.1)(0.9)^2 = 0.081$	150
$A^cA^cA^c$	$(0.9)^3 = 0.729$	100

Note que associamos a cada evento do espaço amostral um valor da variável  $C$  (custo), e eventos diferentes podem corresponder ao mesmo valor de  $C$ :

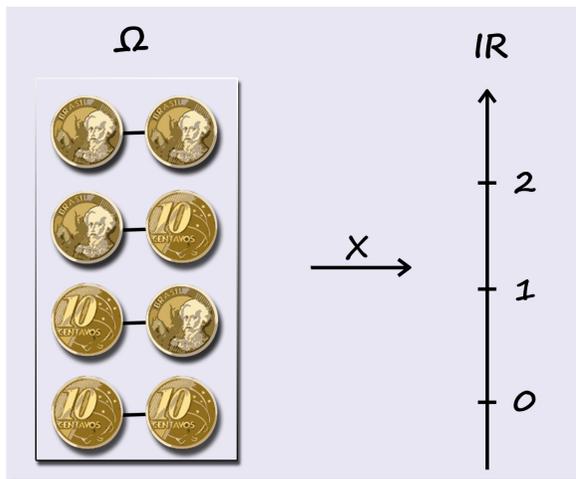
$$c_1 = 100, \quad c_2 = 150, \quad c_3 = 200, \quad c_4 = 250$$

- $P(C = c_1) = P(A^c A^c A^c) = 0.729$
- $P(C = c_2) = P(AA^c A^c \cup A^c AA^c \cup A^c A^c A) = 3 \times 0.081 = 0.243$
- $P(C = c_3) = P(AAA^c \cup AA^c A \cup A^c AA) = 3 \times 0.009 = 0.027$
- $P(C = c_4) = P(AAA) = 0.001$

O comportamento de  $C$  estudado através da probabilidade de ocorrência pode auxiliar na previsão de gastos e na elaboração de orçamentos:

$C$	100	150	200	250
$P(C = c)$	0.729	0.243	0.027	0.001

# Exemplo: Lançamento de uma moeda duas vezes



Espaço amostral:

$$\Omega = \{CC, C\bar{C}, \bar{C}C, \bar{C}\bar{C}\},$$

em que  $C = \text{cara}$  e  $\bar{C} = \text{coroa}$ .

Seja a v.a.  $X = \text{número de caras em dois lançamentos}$ .

$X$	0	1	2
$P(X = x)$	$P(\bar{C}\bar{C}) = \frac{1}{4}$	$P(C\bar{C} \cup \bar{C}C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$P(CC) = \frac{1}{4}$

# Função de Distribuição Acumulada

# Exemplo: Vacina

Um grupo de 1000 crianças foi analisado para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. As crianças recebiam uma dose de vacina e após um mês passavam por um novo teste. Caso ainda tivessem tido alguma reação alérgica, recebiam outra dose.

Variável de interesse:  $X$  = número de doses.

Doses ( $X$ )	1	2	3	4	5
Frequência	245	288	256	145	66

---

Uma criança é sorteada ao acaso, qual a probabilidade dela ter recebido 2 doses?

$$P(X = 2) = \frac{288}{1000} = 0.288$$

# Exemplo: Vacina

Distribuição de Probabilidade de  $X$

Doses ( $X$ )	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.245	0.288	0.256	0.145	0.066

---

Qual a probabilidade da criança ter recebido até duas doses?

$$\begin{aligned}P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0.245 + 0.288 \\ &= 0.533\end{aligned}$$

# Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada (f.d.a.) de uma variável aleatória  $X$  é definida por

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Assim, se  $X$  assume os valores em  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , em que  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ :

$$F(x_1) = P(X = x_1)$$

$$F(x_2) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$$

⋮

$$F(x_n) = P(X = x_1) + \dots + P(X = x_n)$$

# Exemplo: Vacina

Doses ( $X$ )	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.245	0.288	0.256	0.145	0.066

---

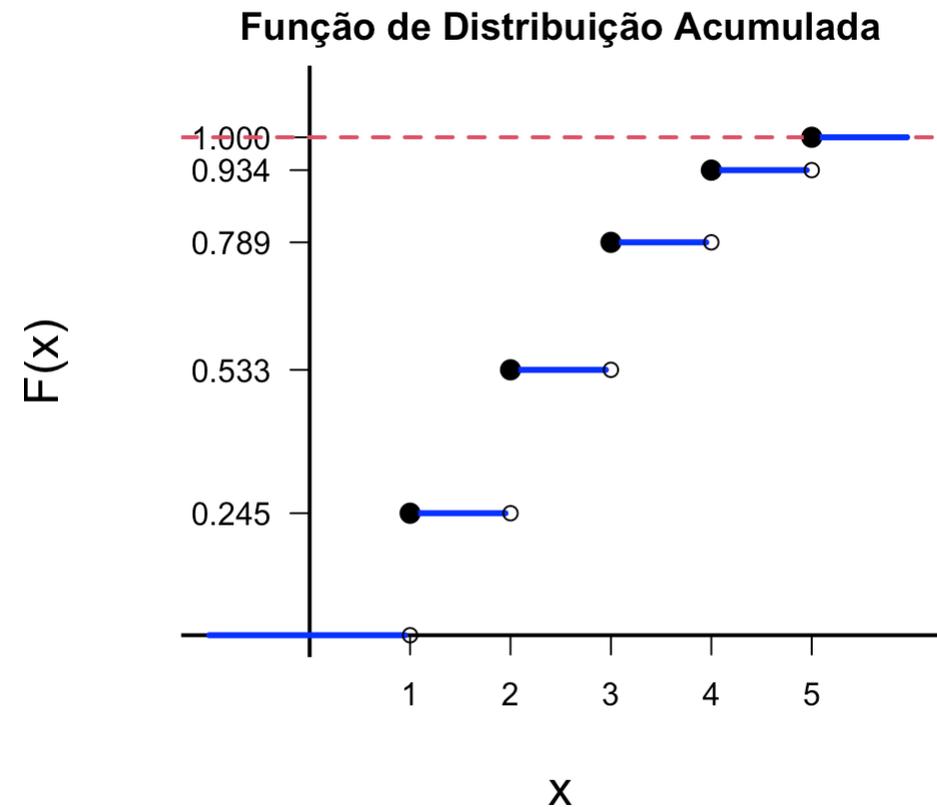
Note que a f.d.a. de  $X =$  número de doses é definida para qualquer valor real, logo:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.245 & 1 \leq x < 2 \\ 0.533 & 2 \leq x < 3 \\ 0.789 & 3 \leq x < 4 \\ 0.934 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

# Exemplo: Vacina

Função de distribuição acumulada (f.d.a.) do número de doses ( $X$ )

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.245 & 1 \leq x < 2 \\ 0.533 & 2 \leq x < 3 \\ 0.789 & 3 \leq x < 4 \\ 0.934 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$



# Exemplo: Comissão

O Departamento de Estatística é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída sorteando, ao acaso, três membros do departamento.

Seja  $X$  o número de mulheres na comissão.  $X$  pode ser 0, 1, 2 e 3.

$X$	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.203	0.450	0.291	0.056

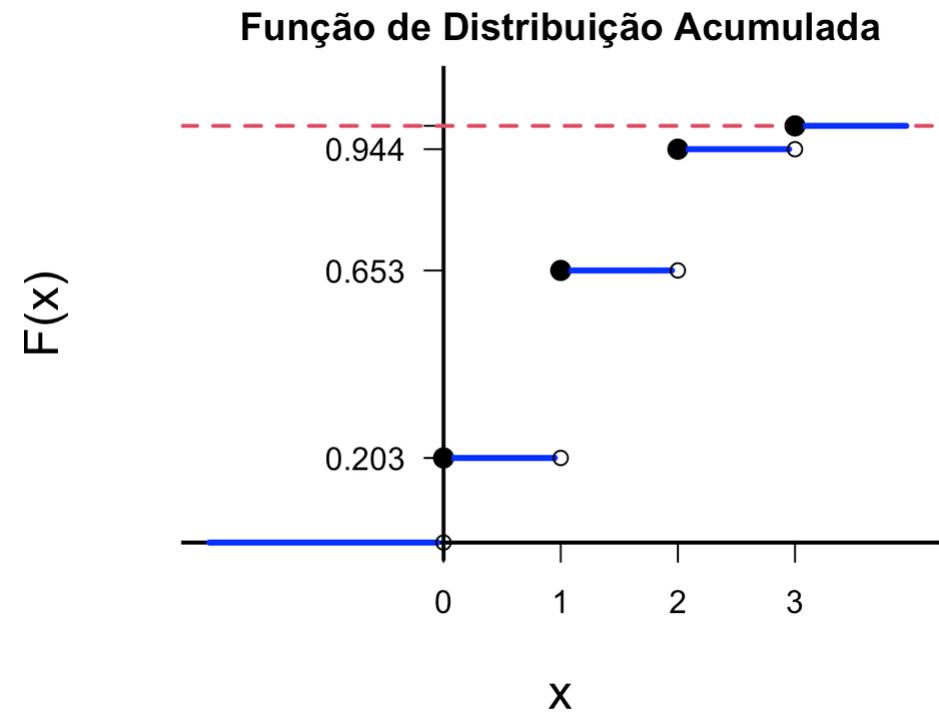
---

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 0.203 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0.653 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0.944 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

# Exemplo: Comissão

Função de distribuição acumulada de  $X$ : número de mulheres na comissão.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 0.203 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0.653 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0.944 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$



Esperança

# Esperança: variável aleatória discreta

Seja  $X$  uma v.a. discreta assumindo os valores  $x_1, \dots, x_n$ .

A **esperança** (ou valor esperado) da variável  $X$  é dada por:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

A esperança de  $X$  é a média ponderada de todos os valores possíveis de  $X$ , onde o peso de cada valor é a probabilidade.

# Esperança - Exemplos

- Suponha que  $X$  assumira os valores 0 ou 1 com igual probabilidade, ou seja,

$$P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

- Suponha que  $X$  assumira os valores 0 ou 1 com as seguintes probabilidades,

$$P(X = 0) = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Veja que nesses dois exemplos:  $\mathbb{E}(X) = P(X = 1)$

# Exemplo: Lançamento de um dado

$X$  é a v.a. representando o resultado do lançamento.

$$P(X = i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5$$

Neste caso, a esperança de  $X$  não é igual a nenhum dos valores possíveis de  $X$ .

Não podemos interpretar  $\mathbb{E}(X)$  como o valor que esperamos que  $X$  irá assumir, mas sim como uma média dos valores observados de  $X$  ao longo de muitas repetições do experimento aleatório.

Se jogarmos o dado muitas vezes e calcularmos uma média de todos os resultados obtidos, essa média será aproximadamente 3.5.

# Exemplo: Seguros

Uma companhia de seguros determina o prêmio anual do seguro de vida de maneira a obter um lucro esperado de 1% do valor que o segurado recebe em caso de morte.

Encontre o valor do prêmio anual para um seguro de vida no valor de R\$200 mil assumindo que a probabilidade do cliente morrer naquele ano é 0.02.

- $A$ : prêmio anual
- $X$ : lucro da companhia no ano para o cliente
- Então,

$$X = \begin{cases} A, & \text{se o cliente sobrevive} \\ A - 200000, & \text{se o cliente morre} \end{cases}$$

# Exemplo: Seguros

$$\mathbb{E}(X) = A \times P(\text{sobreviver}) + (A - 200000) \times P(\text{morrer})$$

$$\mathbb{E}(X) = A \times 0.98 + (A - 200000) \times 0.02$$

$$\mathbb{E}(X) = A - 4000$$

Companhia quer lucro esperado de 1% do valor recebido em caso de morte:  
R\$2000.

$$\mathbb{E}(X) = 2000 = A - 4000$$

Portanto,  $A = R\$6000$  é o valor do prêmio anual.

# Exemplo: Montagem

Um empresário pretende estabelecer uma firma para montagem de um componente mecânico. Cada peça é composta de duas partes,  $A$  e  $B$ , cada uma com uma chance específica de ser defeituosa. Só é possível verificar a qualidade das peças depois que elas são montadas.

- Se ambas são defeituosas, a peça é descartada e dá um prejuízo de \$5.
- Se a peça  $B$  é defeituosa, ainda é possível reparar a peça e obter um lucro de \$5.
- De maneira semelhante, se  $A$  é defeituosa, o reparo permite vender a peça inteira com um lucro de \$10.
- Se as duas peças são boas, o lucro é de \$15.

**Pergunta:** Qual o lucro esperado por peça produzida?

# Exemplo: Montagem

Seja  $A$  o evento indicando que a peça A está perfeita.

Então  $A^c$  indica que a peça A está com defeito.

Seja  $B$  o evento indicando que a peça B está perfeita.

Então  $B^c$  indica que a peça B está com defeito.

Cada uma das configurações está associada a uma probabilidade:

$$P(A \cap B) = 0.56 \quad P(A^c \cap B) = 0.23$$

$$P(A \cap B^c) = 0.02 \quad P(A^c \cap B^c) = 0.19$$

Como podemos descrever a distribuição do lucro por componente?

# Exemplo: Montagem

$$P(A \cap B) = 0.56 \quad P(A^c \cap B) = 0.23 \quad P(A \cap B^c) = 0.02 \quad P(A^c \cap B^c) = 0.19$$

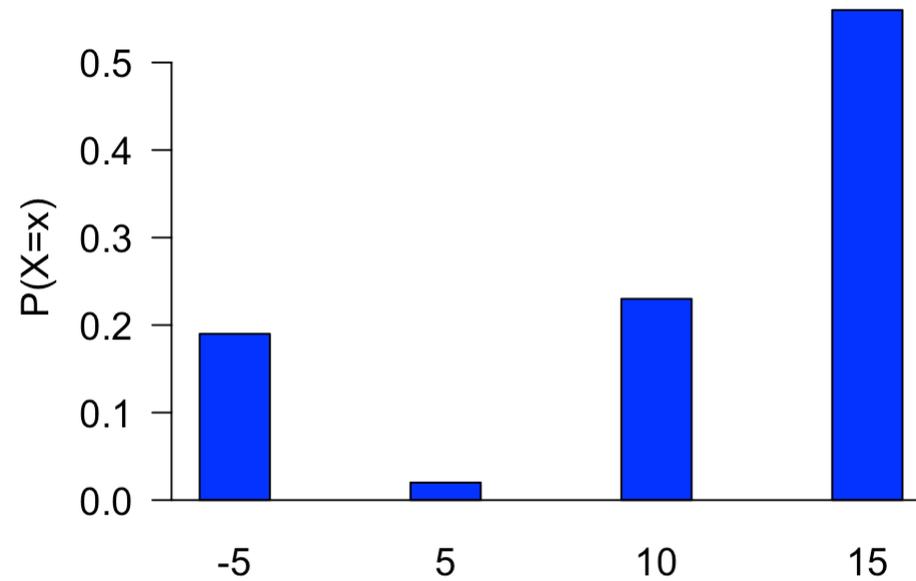
Seja  $X$  a variável indicando o lucro na produção de um componente.

- $X$  assume o valor 15 se as peças A e B estão ok, o que ocorre com probabilidade 0.56.
- $X$  assume o valor 10 se apenas A apresentar defeito, o que ocorre com probabilidade 0.23.
- $X$  assume o valor 5 se apenas B apresentar defeito, o que ocorre com probabilidade 0.02.
- $X$  assume o valor  $-5$  se tanto A quanto B apresentarem defeito, o que ocorre com probabilidade 0.19.

# Exemplo: Montagem

Distribuição de probabilidade para a variável aleatória  $X$ :

$X$	-5	5	10	15
$P(X = x)$	0.19	0.02	0.23	0.56



# Exemplo: Montagem

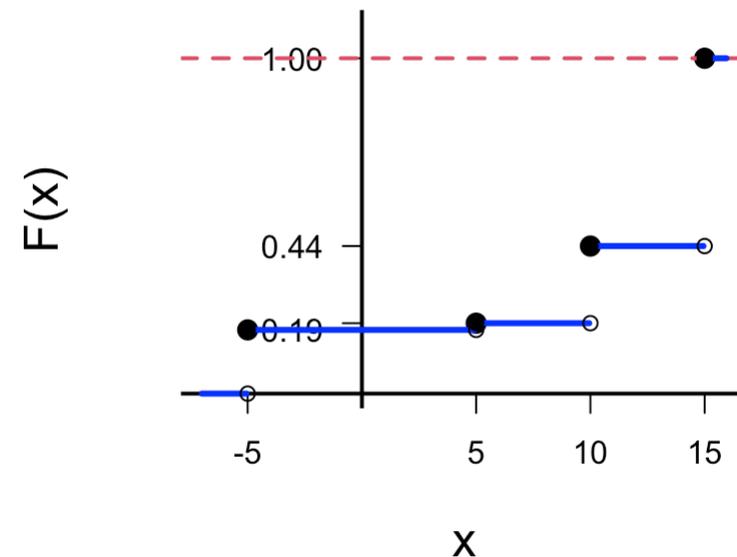
$X$	$-5$	$5$	$10$	$15$
$P(X = x)$	0.19	0.02	0.23	0.56

---

Função de Distribuição Acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -5 \\ 0.19 & \text{se } -5 \leq x < 5 \\ 0.21 & \text{se } 5 \leq x < 10 \\ 0.44 & \text{se } 10 \leq x < 15 \\ 1 & \text{se } x \geq 15 \end{cases}$$

Função de Distribuição Acumulada



# Exemplo: Montagem

O empresário quer saber: *Qual o lucro médio por conjunto montado que espero conseguir?*

$X$	-5	5	10	15
$P(X = x)$	0.19	0.02	0.23	0.56

Lembrem-se que a esperança de uma v.a.  $X$  com valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

Para saber o lucro esperado, basta aplicar a fórmula:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= -5 \times 0.19 + 5 \times 0.02 + 10 \times 0.23 + 15 \times 0.56 \\ &= 9.85\end{aligned}$$

# Exemplo: Pedágio

Você, cansado de esperar em filas de pedágio com frequência, está considerando assinar o serviço de pagamento eletrônico.

Dentre as opções oferecidas, você se interessa pelas duas seguintes:

- Plano 1: Clássico
- Plano 2: BR Adesão Zero

**PLANOS DISPONÍVEIS**

Nunca foi tão fácil ter o Sem Par. Aproveite e diga adeus às filas na



	<b>CLÁSSICO</b> SEM PARAR	<b>BR</b> ADESÃO ZERO SEM PARAR
 <b>COBERTURA</b>	Nacional: Pedágios, Shoppings e Estacionamento	Nacional: Pedágios, Shoppings e Estacionamento
 <b>ADESÃO</b>	R\$ 73,16	ZERO
 <b>MENSALIDADE</b>	R\$ 13,05	R\$ 17,28
 <b>SUBSTITUIÇÃO</b>	R\$ 43,83	ZERO
 <b>FIDELIDADE</b>	ZERO	ZERO
	<a href="#">CLIQUE AQUI e adquira</a>	<a href="#">CLIQUE AQUI e adquira</a>

# Exemplo: Pedágio

No plano Clássico:

- obrigatório fazer adesão novamente após 5 anos.
- em caso de perda/roubo/troca é preciso pagar a taxa de substituição.



Assumindo que não há roubo/perda, mas apenas troca do veículo e que não há o desconto na adesão para renovar após 5 anos, como decidir?

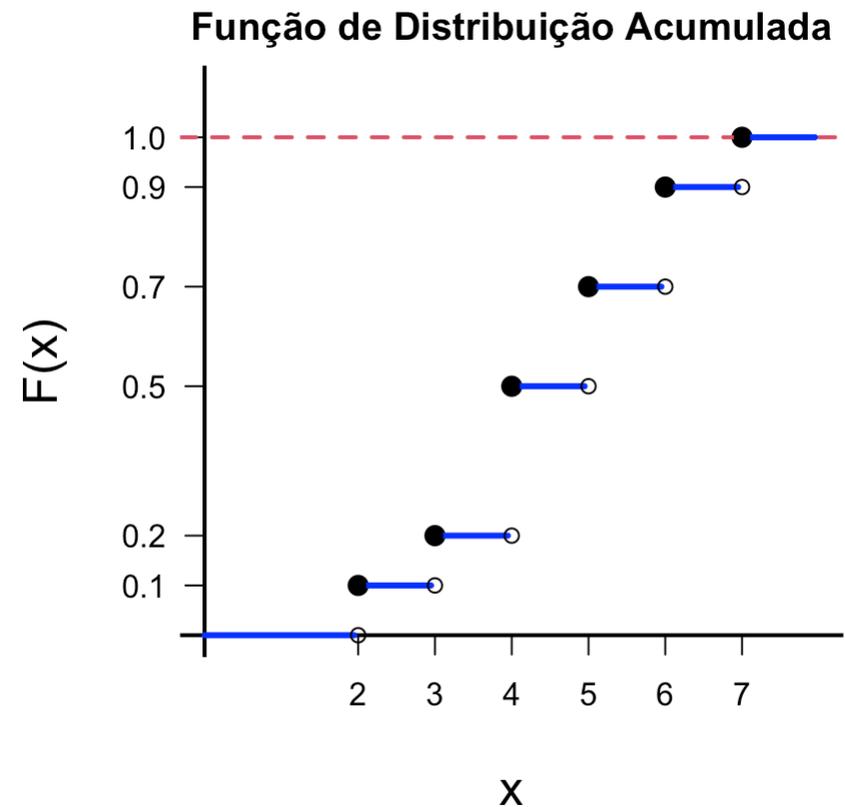
Podemos fazer um exemplo de acordo com o período em que vamos assinar o plano escolhido.

# Exemplo: Pedágio

Seja a v.a.  $T$ : idade do veículo até a troca.

Função de distribuição acumulada é dada por:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ 0.1 & \text{se } 2 \leq t < 3 \\ 0.2 & \text{se } 3 \leq t < 4 \\ 0.5 & \text{se } 4 \leq t < 5 \\ 0.7 & \text{se } 5 \leq t < 6 \\ 0.9 & \text{se } 6 \leq t < 7 \\ 1 & \text{se } t \geq 7 \end{cases}$$



Assumindo que você queira assinar por um período de 3 anos. Vamos definir:

- $C_1$ : custo do plano 1 por 3 anos.

Probabilidade de trocar de carro em até 3 anos: 0.2

Portanto,  $C_1$  assume os valores:

$$C_1 = \begin{cases} 73.16 + 13.05 \times 12 \times 3 = 542.96, & \text{com probabilidade 0.8} \\ 73.16 + 13.05 \times 12 \times 3 + 43.83 = 586.79, & \text{com probabilidade 0.2} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(C_1) = 542.96 \times 0.8 + 586.79 \times 0.2 = 551.73$$

- $C_2$ : custo do plano 2 por 3 anos.

$C_2$  assume o valor  $17.28 \times 12 \times 3 = 622.08$ , com probabilidade 1

$$\mathbb{E}(C_2) = 622.08$$

Assumindo que você queira assinar por um período de 6 anos. Vamos definir:

- $C_1$ : custo do plano 1 por 6 anos.

Probabilidade de trocar de carro em até 6 anos: 0.9

Portanto,  $C_1$  assume os valores:

$$C_1 = \begin{cases} 2 \times 73.16 + 13.05 \times 12 \times 6 = 1085.92, & \text{com probabilidade 0.1} \\ 2 \times 73.16 + 13.05 \times 12 \times 6 + 43.83 = 1129.75, & \text{com probabilidade 0.9} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(C_1) = 1085.92 \times 0.1 + 1129.75 \times 0.9 = 1125.37$$

- $C_2$ : custo do plano 2 por 6 anos.

$C_2$  assume o valor  $17.28 \times 12 \times 6 = 1244.16$ , com probabilidade 1

$$\mathbb{E}(C_2) = 1244.16$$

# Leituras

- [OpenIntro](#): seção 2.4.
- [Ross](#): seções 5.1, 5.2, 5.3.
- Magalhães: seção 3.1.

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Larissa Matos
- Benilton Carvalho

