ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 6

Probabilidade

Experimento: Lançamento de 3 moedas

Lançar 3 moedas honestas simultaneamente, e observar a face voltada para cima.

$$\Omega = \{(CCC), (CCX), (CXC), (XCC), (XXC), (XCX), (CXX), (XXX)\}$$

Moedas honestas, então cada elemento do espaço amostral tem igual probabilidade de ocorrer: 1/8

Qual é a probabilidade de obtermos 3 caras?

$A = \{(CCC)\}$

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos em A}}{\text{número de elementos em } \Omega} = \frac{1}{8}$$

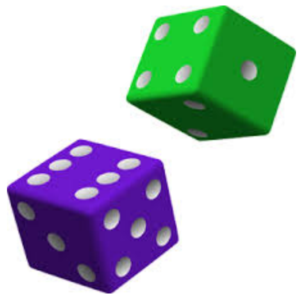
Experimento: Lançamento de 3 moedas

Qual a probabilidade de obtermos pelo menos 2 caras?

$B = \{(CCC), (CCX), (CXC), (XCC)\}$

$$P(B) = \frac{\text{número de elementos em B}}{\text{número de elementos em } \Omega} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Jogo de dados



Dois dados honestos são lançados simultaneamente

O jogador deve escolher uma das duas opções antes do lançamento dos dados. Caso a opção escolhida ocorra, ele será o vencedor.

As duas opções são:

- **Opção A:** Soma das duas faces é igual a 7;
- **Opção B:** Maior valor obtido nos dois dados seja no máximo 3.

Qual das duas possibilidades ele deve escolher?

Jogo de dados

Dois dados honestos são lançados simultaneamente

Espaço amostral:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Dados honestos, então cada elemento do espaço amostral tem igual probabilidade de ocorrer: 1/36

Jogo de dados

Opção A: Soma das duas faces é igual a 7.

$A = \{\text{conjunto dos pares } (i, j) \text{ tais que } i + j = 7\}$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos em A}}{\text{número de elementos em } \Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Jogo de dados

Opção B: Maior valor obtido nos dois dados seja no máximo 3.

$B = \{\text{conjunto dos pares } (i, j) \text{ tais que } i \leq 3 \text{ e } j \leq 3\}$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$$P(B) = \frac{\text{número de elementos em B}}{\text{número de elementos em } \Omega} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Como $P(A) < P(B)$ é mais vantajoso escolher a opção B.

Regras de Contagem

Regras de contagem

- Espaço amostral finito $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ com elementos equiprováveis, então:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos no evento A}}{\text{número de elementos no espaço amostral}}.$$

- Precisamos conhecer regras de contagem para calcular probabilidade de eventos.

Exemplo: Em um grupo de 100 pessoas, 2 são daltônicas. Dez pessoas são escolhidas ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de escolhermos apenas uma pessoa daltônica?

De quantas maneiras podemos selecionar 10 pessoas a partir de um grupo de 100 pessoas, sem reposição?

Regra da adição

Regra da adição: suponha que temos dois procedimentos possíveis para executarmos uma tarefa, ou seja, basta executarmos um dos dois procedimentos para que a tarefa tenha sido executada.

O procedimento P_1 tem n_1 formas de ser executado e o procedimento P_2 tem n_2 formas de ser executado.

O total de maneiras para executarmos a tarefa é então dado por $n_1 + n_2$.

Regra da adição

Exemplo: Entre as opções de sobremesa de um restaurante, você pode escolher entre sorvete e torta.


Há dois sabores de torta: baunilha ou cereja.
Há três sabores de sorvete: morango, chocolate e creme.

Quantas opções você tem no total?

Você pode escolher torta OU sorvete, então existem $2 + 3 = 5$ opções.

Regra da multiplicação

Regra da multiplicação: suponha que para realizarmos uma tarefa temos que executar dois procedimentos, denotados por P_1 e P_2.

O procedimento P_1 tem n_1 formas de ser executado e o procedimento P_2 tem n_2 formas de ser executado.

O total de maneiras para executarmos a tarefa é dado por $n_1 \times n_2$.

Regra da multiplicação

Exemplo: Você vai no Spoleto e vê no cardápio "Monte sua Massa".

Tipo de Massa	Tamanho	Molho	Gratinar?
Farfale	Bambini	Bolognesa	Sim
Fettuccine	Normal	Branco	Não
Fusili Integrale	Mamma	Funghi	
Penne		4 Queijos	
Spaghetti		Tomate	

Quantas opções de pratos você têm no total?

Você pode criar $5 \times 3 \times 5 \times 2 = 150$ pratos diferentes.

Exemplo: Sobremesas

Você volta no mesmo restaurante das tortas e sorvetes. Há dois sabores de torta (baunilha ou cereja) e três sabores de sorvete (morango, chocolate e creme).

Apenas aos sábados, o restaurante oferece a “Torta da Casa”, que é uma torta com sorvete em cima. Aos sábados, quantas opções de sobremesa você tem no total?

- $2 + 3 = 5$ opções caso não escolha “Torta da Casa”.
- $2 \times 3 = 6$ opções de “Torta da Casa”.
- Total: 11 opções de sobremesa.

Exemplo: Placa de carro

De quantas formas diferentes podemos escolher a placa de um carro, tendo essa 3 letras e 4 números?

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175.760.000$$

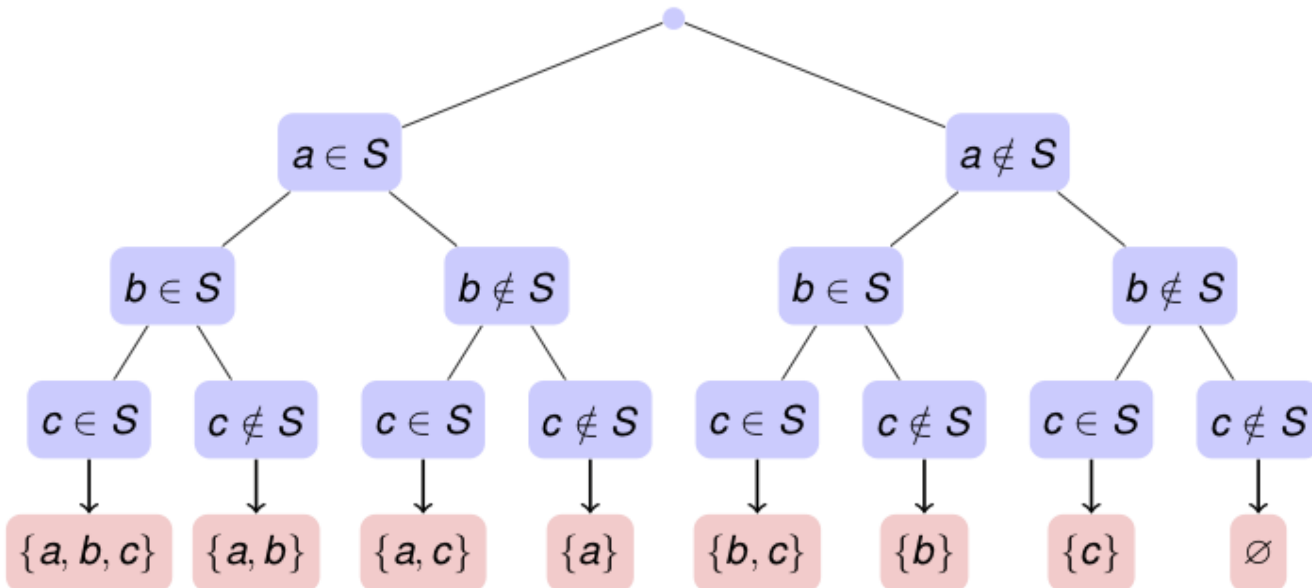
E se não pudesse haver repetição de letras e números?

$$26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 78.624.000$$

Subconjuntos de um conjunto finito

Um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos.

Exemplo: Formar $S \subset \{a, b, c\}$.

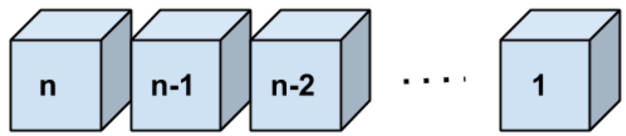


Permutação

Suponha que tenhamos uma coleção $O = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de n objetos. De quantas maneiras podemos permutar (dispor) estes elementos?

O número de maneiras que podemos fazer isto é denominado **permutação**.

Suponha que temos n caixas e queremos dispor os n objetos de O nessas caixas.



Aplicando a regra da multiplicação, temos que o número de maneiras de permutar n elementos é:

$$n \times (n-1) \times \ldots \times 1 = n!$$

Exemplos

Exemplo 1: Se tivermos três CD's (a, b e c). De quantas formas diferentes posso distribuí-los para três amigos?

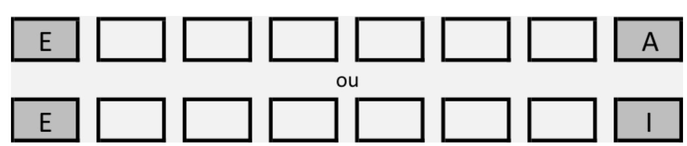
$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Ou seja, temos as seguintes permutações:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

Exemplo 2: Quantos anagramas podemos formar com a palavra ERVILHAS, sendo que eles comecem com a letra E e terminem com vogal?

$$1 \times 6! \times 2 = 1440$$



Permutação

Suponha que queremos permutar n objetos, mas alguns deles são indistinguíveis.

Exemplo: Quantos anagramas podemos formar com a palavra PEPPER?

Seria $6! = 720$, certo?

Mas note que $P^1E^1P^2P^3E^2R = P^2E^1P^1P^3E^2R$

Na verdade, existem $3!2! = 12$ permutações quer resultam no mesmo anagrama

Portanto, o número de possíveis anagramas distintos é:

$$\frac{6!}{3!2!} = 60$$

Permutação

O número de divisões possíveis de n objetos distintos em r grupos distintos de tamanhos respectivos $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ($n_1 + \cdots + n_r = n$) é

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ \ldots \ n_r!},$$

que é chamado um *coeficiente multinomial*.

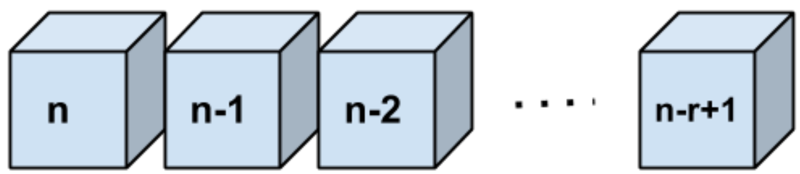
Arranjo

Suponha que tenhamos uma coleção $O = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de n objetos.

De quantas maneiras podemos escolher r destes elementos?

O número de maneiras que podemos fazer isto é denominado **arranjo**.

Suponha que temos r caixas e queremos dispor os n objetos de O nessas caixas.



Arranjo

Aplicando a regra da multiplicação, temos que o número de maneiras de arranjar n elementos em r caixas é:

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = A(n,r)$$

Exemplo: Se tivermos os objetos a, b, c e d, de quantas maneiras podemos escolher 2 elementos:

$$A(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = 12,$$

que seriam as seguintes: $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$.

Combinação

Suponha que tenhamos uma coleção $O = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de n objetos.

De quantas maneiras podemos escolher r destes elementos sem considerarmos a ordem?

O número de maneiras que podemos fazer isto é denominado **combinação**.

O número de maneiras de alocarmos os n objetos em r caixas é:

$$A(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Como a ordem não importa, após alocarmos os r objetos, temos $r!$ formas de permutá-los.

Combinação

Então o número de maneiras de escolhermos r objetos sem importar a ordem dentre n objetos é:

$$\frac{A(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} = C(n,r)$$

Exemplo: Se tivermos os objetos a, b, c e d, de quantas maneiras podemos escolher 2 elementos sem considerar a ordem?

$$C(4,2) = \binom{4}{2} = 6,$$

que seriam as seguintes: ab, ac, ad, bc, bd, cd.

Exemplo

Sete atletas estão competindo nas olimpíadas. O pódium tem 3 lugares: ouro, prata e bronze. Quantos pódiuns podem ser feitos?

- A ordem importa (ouro, prata e bronze):

$$7 \times 6 \times 5 = 210$$

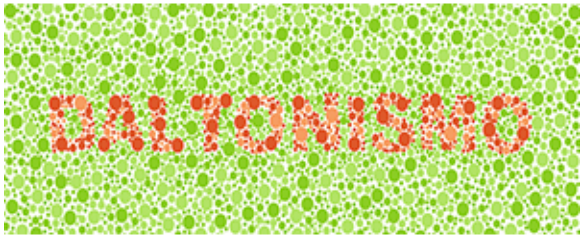
$$A(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$$

- A ordem não importa:

$$C(7,3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

Exemplo

Em um grupo de 100 pessoas, 2 são daltônicas. Dez pessoas são escolhidas ao acaso e sem reposição.



Qual a probabilidade de escolhermos apenas uma pessoa daltônica?

De quantas maneiras podemos selecionar 10 pessoas a partir de um grupo de 100 pessoas, sem reposição?

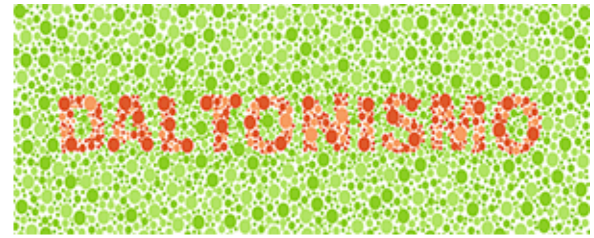
$$C(100, 10) = \binom{100}{10}$$

De quantas maneiras podemos selecionar 1 pessoa a partir de um grupo de 2 pessoas daltônicas?

$$C(2, 1) = \binom{2}{1}$$

Exemplo

Em um grupo de 100 pessoas, 2 são daltônicas. Dez pessoas são escolhidas ao acaso e sem reposição.



Qual a probabilidade de escolhermos apenas uma pessoa daltônica?

De quantas maneiras podemos selecionar 9 pessoas a partir de um grupo de 98 pessoas com visão normal?

$$C(98, 9) = \binom{98}{9}$$

Então, a probabilidade de escolhermos apenas uma pessoa daltônica:

$$\frac{\binom{2}{1}\binom{98}{9}}{\binom{100}{10}}$$

Exemplo

Uma caixa contém 2 bolas vermelhas, 3 verdes e 2 azuis. Duas bolas são selecionadas aleatoriamente. Qual a probabilidade de que nenhuma bola seja azul?

- Total de bolas: 7
- Maneiras de sortear 2 bolas dentre 7 bolas: $C(7,2) = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 21$
- A=sortear 2 bolas, nenhuma sendo azul.

$$C(5,2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

$$P(A) = \frac{10}{21}$$

Exemplo

Em uma classe, há 15 meninos e 10 meninas. Três alunos são selecionados ao acaso. Qual a probabilidade de sortear 1 menina e 2 meninos?

- Maneiras de sortear 3 alunos dentre 25:
  $C(25, 3) = \binom{25}{3} = \frac{25!}{3!(25-33)!} = 2300$

- A=sortear 1 menina e 2 meninos.

$C(10, 1) = \frac{10!}{1!(10-1)!} = 10$ e $C(15, 2) = \frac{15!}{2!(15-2)!} = 105$

Número de elementos em A= $C(10, 1)$ x $C(15, 2) = 1050$.

$$P(A) = \frac{1050}{2300} = \frac{21}{46}$$

Exemplo

Uma sacola tem 4 bolas brancas, 5 vermelhas e 6 azuis. Três bolas são selecionadas ao acaso da sacola. Qual a probabilidade de que todas elas sejam vermelhas?

- Total de bolas: 15
- Maneiras de sortear 3 bolas dentre 15 bolas: $C(15,3) = \binom{15}{3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = 455$
- A=sortear 3 bolas vermelhas.

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

$$P(A) = \frac{10}{455} = \frac{2}{91}$$

Aniversários no mesmo dia?

Nessa sala com mais de 100 alunos, quantas pessoas vocês acham que fazem aniversário no mesmo dia?

Eu aposto que existem pelo menos um par de pessoas que fazem aniversário no mesmo dia!!!

Vamos verificar?

Paradoxo do Aniversário

Para calcular a probabilidade de que em uma sala com n pessoas, pelo menos duas possuam o mesmo aniversário: desprezamos variações na distribuição, tais como anos bissextos, gêmeos, variações sazonais ou semanais, e assumimos que 365 possíveis aniversários são todos igualmente prováveis.

É mais fácil calcular a probabilidade do evento A, definido como todos os n aniversários são diferentes:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \\
&= \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} \\
&= \frac{365!}{365^n (365 - n)!}
\end{aligned}
$$

Paradoxo do Aniversário

A segunda pessoa não pode ter o mesmo aniversário do que o primeiro (364/365), o terceiro não pode ter o mesmo aniversário do que o segundo (363/365), etc.

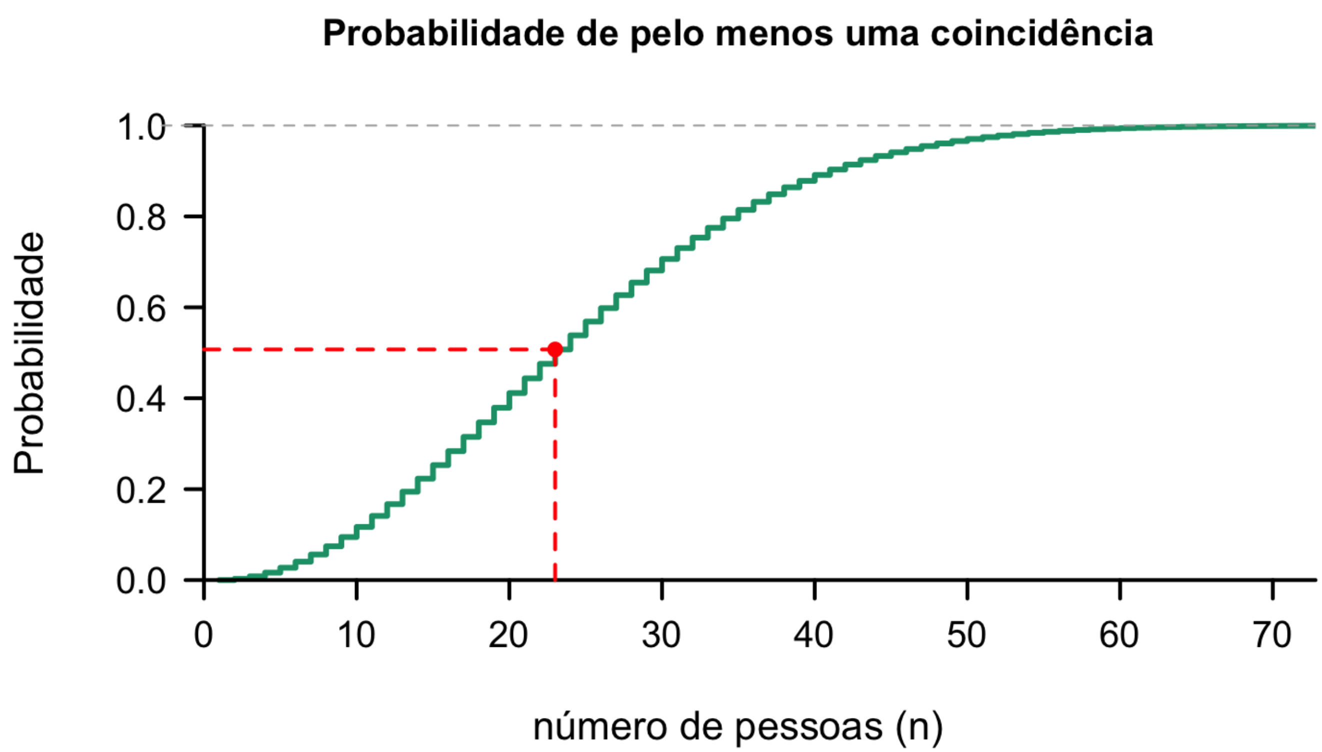
O evento de pelo menos duas pessoas entre n terem o mesmo aniversário (chamaremos de evento B) é o complementar de todos n serem diferentes (evento A).

Consequentemente, sua probabilidade é:

$$P(B) = 1 - P(A)$$

Paradoxo do Aniversário

Qual é a probabilidade de pelo menos uma coincidência?



Amostragem

Amostragem

Amostragem Aleatória Simples

Amostragem Aleatória Simples (AAS) é um plano amostral no qual n unidades são selecionadas de uma lista com N unidades, de tal forma que cada combinação possível das n unidades tenha a mesma probabilidade de ser selecionada.

Há dois tipos de AAS:

- AAS_c: amostragem aleatória simples com reposição.
- AAS_s: amostragem aleatória simples sem reposição.

Seleção de Amostras

Número de amostras possíveis de n elementos de uma população de N.

- $AAS_c : N^n$
- AAS_s:
- $\binom{N}{n}$, caso não ordenado.
- $\frac{N!}{(N-n)!}$, caso ordenado.

Amostragem Aleatória Simples

Exemplo: amostra de tamanho $n = 2$ de uma população de tamanho $N = 4$.

Elementos da população: {A, B, C, D}

Usando AAS_c, podemos obter: $4^2 = 16$ amostras diferentes.

AA, AB, AC, AD,
BA, BB, BC, BD,
CA, CB, CC, CD,
DA, DB, DC, DD

Amostragem Aleatória Simples

Exemplo: amostra de tamanho $n = 2$ de uma população de tamanho $N = 4$.

Elementos da população: {A, B, C, D}

Usando AAS_s, ordenada, podemos obter: $4!/(4-2)! = 12$ amostras diferentes.

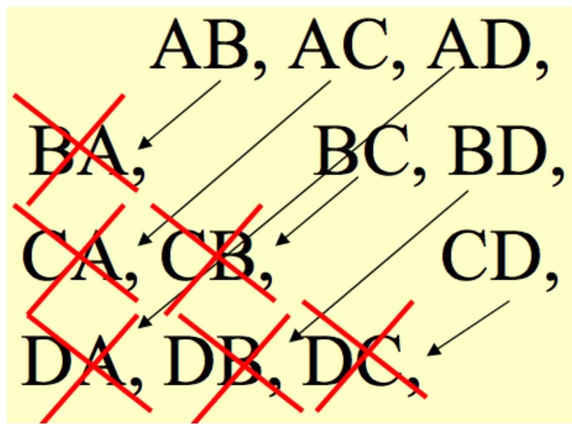
~~AA~~, AB, AC, AD,
BA, ~~BB~~, BC, BD,
CA, CB, ~~CC~~, CD,
DA, DB, DC, ~~DD~~

Amostragem Aleatória Simples

Exemplo: amostra de tamanho $n = 2$ de uma população de tamanho $N = 4$.

Elementos da população: {A, B, C, D}

Usando AAS_s, não-ordenada, podemos obter: $\binom{4}{2} = 6$ amostras diferentes.



Amostragem Aleatória Simples

AAS: todas as amostras têm a mesma probabilidade de serem selecionadas.

A probabilidade de se selecionar cada amostra de tamanho n é:

- AAS_c: $1/N^n$
- AAS_s:
- $1/\binom{N}{n}$, caso não ordenado.
- $1/\frac{N!}{(N-n)!}$, caso ordenado.

Exemplo

Uma comissão formada por 3 estudantes tem que ser selecionada numa classe de 20 alunos.

De quantas formas diferentes pode ser selecionada essa comissão?

$$C(20,3) = \binom{20}{3} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = 1140$$

(sem reposição e ordem não importa)

Exemplo

Um ônibus possui 10 assentos disponíveis.

De quantas formas 7 passageiros podem ocupar os assentos?

$$\frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 604800$$

(sem reposição e ordem importa)

Exemplo

Quantos números de 4 dígitos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6?

$6^4 = 1296$ (com reposição)

Qual a probabilidade de se escolher um número dentre os 1296 e este possuir os dois primeiros dígitos iguais entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros?

- Para o primeiro dígito, temos 6 possibilidades.
- Para o segundo dígito, temos 1 possibilidade, pois ele deve ser igual ao primeiro.
- Para o terceiro dígito, temos 5 possibilidades, pois ele deve ser diferente do primeiro (e do segundo).
- Para o quarto dígito, temos 5 possibilidades, pois ele deve ser diferente do primeiro (e do segundo).

A probabilidade é

$$\frac{6 \times 1 \times 5 \times 5}{1296} = \frac{25}{216} \approx 0.12$$

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Larissa Matos
- Benilton Carvalho